Math. p.
187l

Grieser (Joh. Georg)

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Elementar-Arithmetik

und

Algebra.

Nach den Forderungen

der

Ordnung der lateinischen Schulen und der Gymnasien in dem Königreiche Bayern

vom Jahre 1830

verfaßt

von

Johann Georg Grieser,

der Mathematik Lyzeal-Professor an der k. b. Studien-Anstalt zu Neuburg.

Kempten,

Druck und Verlag von Tobias Dannheimer.

1832.

128 D.

„Ex numeris proficiscuntur omnia!“

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Der ein und achzigste Paragraph der »Ordnung der lateinischen Schulen und der Gymnasien in dem Königreiche Bayern 1830« befiehlt folgenden Stufengang des mathematischen Gymnasial-Unterrichtes:

»Der mathematische Unterricht beginnt in der ersten Gymnasial-Classe mit einer zweckmäßigen Wiederholung des frühern arithmetischen Unterrichtes, und geht dann zur Buchstabenrechnung und den Gleichungen des ersten Grades über.«

»In der zweiten Classe folgt die Lehre von den Potenzen und Wurzeln nebst den quadratischen Gleichungen.«

»In der dritten Classe die Lehre von den Proportionen, Logarithmen und Progressionen, nebst den Anfangsgründen der Longimetrie.«

»In der vierten Classe werden die Anfangsgründe der Planimetrie und Stereometrie gelehrt.«

»In den beiden obern Classen soll auch die mathematisch-physicalische Geographie in eigenen Stunden gegeben werden.«

»Findet der Lehrer den Schüler-Curs geeignet, so kann in der zweiten Classe auch der Binominalsatz vorgetragen werden, so wie unter gleicher Voraussetzung auch in der vierten Classe die Anfangsgründe der ebenen Trigonometrie gelehrt werden können.«

»Ferner sollen zum Behufe dieser mathematischen Doctrinen Lehrbücher hergestellt werden.«

Bereits im Studienjahre $18\frac{22}{23}$ habe ich eine Elementar-Geometrie und ebene Trigonometrie für Schulen und zum Selbst-Unterrichte verfaßt *), und seitdem mit dem größten Nutzen gebraucht. Dieses Buch enthält genau alles dasjenige, was der §. 81 der Schulordnung vorschreibt. Auch paßt das Lehrbuch zum freien Zusammenhange mit meiner ge-

*) Kempten bei Dannheimer. (Preis 54 kr.)

genwärtigen Elementar-Arithmetik und Algebra. Eben so schrieb ich für die Schulen einen äußerst brauchbaren und sehr vollständigen »Leitfaden zur mathematischen und physicalischen Geographie 1830« *).

Für Geometrie und Geographie habe ich also nach Kräften und Bedürfniß Sorge getragen. Dieses thue ich nun auch in Bezug auf die Arithmetik und Algebra in dem vorliegenden Werkchen, das den oben angegebenen Titel führt. Ich schrieb dasselbe in Hinsicht auf die königlich-bayerische Schulordnung, und nahm darin alle anbefohlenen Gegenstände auf.

Hierorts erlaube ich mir aber die Bemerkung, daß ich jeden Stoff vollständig und deutlich abgehandelt habe. Vollständig, indem beinahe jedesmal alle Methoden oder Verfahrungsarten aufgeführt wurden, nach Kästners Ausspruche: Man muß sich durch die Zusammenstimmung der Methoden überzeugen! In dieser Beziehung trifft man die Art und Weise an, mit 7 allgemeiner Vorschrift nach zu verkleinern, die unendlichen Decimalbrüche auch nach Eulers Regel zu summieren, neuere Lösungen mit ältern zu vergleichen u. s. w. Deutlich, indem das Gesetz der Ein-

*) Kempten bei Dannheimer. (Preis 24 kr.)

fachheit überall hervorgehoben ist; z. B. bei der Multiplication der Sexagesimalbrüche, bei der Gleichnamigmachung der Wurzelgrößen ꝛc.; indem ferner die Sätze kurz dargelegt sind, mit Beobachtung der Warnung des Horatius:

— — — — Brevis esse laboro,
Obscurus fio!

Aus dem Umstande, daß ich mich der Vollständigkeit befliß, kann man schon selbst den Schluß ziehen, daß ich es an der Beweisführung nirgend habe fehlen lassen; denn dadurch unterscheidet sich ja der Mathematiker von dem gewandtesten Rechner, daß er alles zu begründen im Stande ist, oder daß er das klare Bewußtsein jeder Operation besitzt, also niemals aus der Fassung gebracht werden kann, es wäre denn, daß ihm Jemand darzuthun im Stande sei, er handle nach falschen Grundlagen.

Wenn ich jetzt meinem Lehrbuche der Elementar-Arithmetik und Algebra so schöne Eigenschaften beilege, so spreche ich dieselben den Verfassern anderer Lehrbücher dieser Gattung nicht ab. Die Männer, welche ich gleich Anfangs hochachtungsvollest und dankbarst genannt habe, und deren Schriften ich so

manche mathematische Bildung mit verdanke, besonders meine Lehrer, Hr. Lyceums-Professor Doctor Bundschue und Hr. geistl. Rath Magold, haben jene Wege eingeschlagen, die ihrem Bedürfnisse und ihrer Ansicht entsprachen. Insonderheit verdankt die mathematische Ueberlieferung dem k. b. Herrn geistlichen Rathe und Stadtpfarrer in Landshut, Universitäts-Professor Maurus Magold, unendlich vieles, weil dieser preiswürdige Lehrermit dem Eintritte dieses neuen Jahrhundertes durch seine Schriften und seine Vorlesungen auch eine belebendere, freundlichere Methode mit Beibehaltung der höchsten mathematischen Schärfe und Präcision geltend gemacht hat!

Sagte ich, daß mein Lehrbuch dem neuesten Schulplane von 1830 sein Entstehen verdankt, und nach demselben eingetheilt worden ist; so will ich seinen Wirkungskreis nicht verengen, da es jeder Mathematikbeflissene auch außer den Studiengrenzen benützen und selbst daraus lernen kann. Es taugt auch zum Selbstunterrichte, und verläßt den Fleißigen nimmermehr! Für die verwendete Zeit und Mühe wird er durch so manche angenehme Gleichungs- und Proportionsaufgabe entschädiget.

Ich schließe mit dem bescheidenen Wunsche, daß die Staatsregierung meiner Arbeit durch ihre Auf-

nahme in die Landesschulen Gedeihen und Fortgang verschaffen möge, da ich doch eigentlich nur im Sinne, wenn auch im ausgebreitetern, jenes braven Schriftstellers, Georg v. Lory, gehandelt habe, welcher bereits im Jahre 1776 Anfangsgründe der Arithmetik und Algebra, der Geometrie und Trigonometrie, der Naturlehre zum Gebrauche der Schulen in den (damals) churbayerischen Landen geschrieben hat!

Neuburg an der Donau im Mai 1832.

Professor Georg Grieser.

Buchstabenrechnung und Algebra.

Erster Abschnitt.

Erklärungen.

§. 1.

Mathematik (μάθημα, μανθάνω) ist die Lehre von den Größen. Größe (quantum, quantitas) ist der Inbegriff von gleichartigem Mannigfaltigen.

Gleichartig (homogeneum) heißt das den Dingen Gemeinsame.

Die Größen sind:

a) stetig und discret (continuum, discretum), je nachdem das Gleichartige zusammenhängt oder gesondert ist;

b) bejahend oder verneinend (positivum et negativum), je nachdem das Gleichartige in der Wechselbeziehung aufgefaßt wird; z. B. Schulden gegen Vermögen;

c) ganz oder gebrochen (fractae), je nachdem sie in der Gesammtheit oder theilweise da stehen.

Zeichen der Größen sind Buchstaben und Ziffern.

Die Arithmetik (ἀριθμέω) lehrt die Zahlengrößen unter einander verbinden.

Die Algebra ist ein Theil der Arithmetik, und lehrt aus Gegebenem Unbekanntes erforschen.

§. 2.

Die Verbindung der Größen geschieht:

a) durch Zusammenzählung (Addition), wo die Theile oder Posten zur Einheit oder Summe vereiniget werden. Zeichen der Addition: (+); z. B. $3 + 2 = 5$; $a + b = c$, d. h. a plus b gibt c oder $a + b$ ist gleich c.

b) durch Abziehung (Subtraction), wodurch zwei Größen in Bezug auf ihr Mehr wegnehmungsweise verglichen werden; die eine Größe heißt Minuend, die

andere Subtrahend, das Resultat Rest; Zeichen der Subtraction: (—); z. B. 16 — 9 = 7; a — n = p; d. h. 16, weniger oder minus 9, ist gleich 7.

c) durch Vervielfältigung (Multiplication), wodurch angegeben wird, wie oft (und wie) eine Größe genommen worden sei; Factoren sind die genommenen Größen (Multiplicator und Multiplicand), und das Ergebniß heißt Produkt; das Zeichen: (× oder .); z. B. 3 × 4 heißt 3 mal 4 oder 4 mal 3; 3 . 4 = 3 mal 4; a × b = a mal b oder b mal a = ab oder ba.

d) durch Theilung (Division), wodurch angezeigt wird, wie oft eine Größe in einer andern enthalten sei; die eine Größe heißt Dividend, die andere Divisor; das Resultat Quotus; das Zeichen: (:); z. B. 26 : 13 = 2 heißt so viel als: 13 ist in 26 2 mal enthalten; es ist 26 Dividend, 13 Divisor, 2 Quotient. Lit. a bis d enthält, was man die vier Species zu nennen pflegt.

§. 3.

Wenn man eine Größe mit sich selbst einmal multipliciert, entsteht ein Quadrat; z. B. $5 \times 5 = 5^2 = 25$; 2 ist Exponent; wenn man eine Größe zweimal mit sich selbst multipliciert, entsteht ein Cubus; z. B. $5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$; 3 ist Exponent; wenn man eine Größe dreimal mit sich selbst multipliciert, ergibt sich das Biquadrat; z. B. $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$. Diese Exponenten nennt man Würden oder Potenzen, und das Multiplicieren einer Größe durch sich selbst heißt potenzieren. Die Größe, die man mehrmal in sich selbst multipliciert hat, heißt man Wurzel (radix), und zwar Quadratwurzel ($\sqrt{}$), Cubikwurzel ($\sqrt[3]{}$), je nachdem die Multiplication der Größe mit sich selbst ein- oder zweimal geschah. Der Ausdruck $\sqrt{4} = 2$ bedeutet: Quadratwurzel aus 4 ist gleich 2, weil $2 \times 2 = 2^2 = 4$; $\sqrt[3]{8} = 2$, d. h. die Cubikwurzel aus 8 ist 2, weil $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$. Dieses Verfahren heißt Wurzelausziehen oder Depotenzieren.

Wenn man die nämliche Größe mehrmal zu sich selbst addirt; so heißt die links vor der Summe stehende Ziffer Coefficient; z. B. a + a + a = 3a; 3 ist Coefficient. Eine einzelne Größe z. B. a heißt so viel als: $+ 1a^1$.

§. 4.

Grundsätze (axiomata) der Mathematik sind folgende vier;

1) Jede Größe ist sich selbst gleich; z. B. $A = A$; $8 = 8$;

2) Das Ganze ist allen seinen Theilen zusammengenommen gleich;

3) Zwei Größen, welche einer dritten gleich sind, sind einander gleich; z. B.

$$\begin{array}{l} \text{wenn } 1 + 4 = 5 \\ \text{und } \;\; 2 + 3 = 5 \\ \hline \text{so } 1 + 4 = 2 + 3. \end{array}$$

4) Gleiches auf gleiche Weise behandelt, gibt Gleiches; Gleiches auf ungleiche, oder Ungleiches auf gleiche Weise behandelt, gibt Ungleiches; z. B.

$$\begin{array}{c} 5 = 5 \\ 2 = 2 \\ \hline 5 + 2 = 5 + 2; \end{array} \qquad \begin{array}{c} 5 = 5 \\ 2 = 2 \\ \hline 5 - 2 = 5 - 2; \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 5 = 5 \\ 2 = 2 \\ \hline 2 \times 5 = 2 \times 5; \end{array} \qquad \begin{array}{c} 5 = 5 \\ 2 = 2 \\ \hline 5 : 2 = 5 : 2; \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{größer} \\ 5 > 4 \\ 2 = 2 \\ \hline 5 \pm 2 > 4 \pm 2; \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{kleiner} \\ 3 < 5 \\ 3 = 3 \\ \hline 3 \times 3 < 3 \times 5. \end{array}$$

Diese vier Sätze heißen Grundsätze, weil sie zur Wahrheit keines Beweises bedürfen.

Das Zeichen des Unendlichgroßen ist ∞ oder $\frac{1}{0}$, des Unendlichkleinen aber $\frac{1}{\infty}$ oder $\frac{0}{1}$.

§. 5.

Der Nutzen der Mathematik besteht in Folgendem:

1) sie bereitet den Geist zur Ergreifung der philosophischen Wahrheiten. Οὐδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰςίτω Plato;
2) sie ist im menschlichen Leben unentbehrlich für Maß und Zahl, und erstreckt sich über alle Stände eines Staates; sie erscheint auch in jeder andern Wissenschaft als belebendes Organ;
3) sie ist eine angenehme Wissenschaft für jenen, der ihre Tiefen erspäht hat.

Die größten Männer aller Zeiten und Geschlechter haben die Mathesis zum Gegenstande ihrer Untersuchungen gewählt; z. B. Thales, Pythagoras, Plato, Archimedes, Euklides, Vitruvius, Ludolph v. Ceulen, Adrian Vlaq, Leibniz, Newton, Euler, Carnot, Riccati, Kästner, Vega, Gauß, Magold, Stahl, Bundschue, Späth, Prändel, Weigl, Rumpf und andere; denn die Mathematik vereint das trinum perfectum: utile, jucundum, honestum.

Die Abhandlung der Arithmetik geschieht in vorliegendem Buche so: Vier Species in Ganzen, Theilbarkeit der Zahlen, vier Species der Brüche verschiedener Gattungen, Potenzieren und Depotenzieren, Gleichungen (Algebra), Proportionen und Reihen, Logarithmen, praktische Rechenkunst, Binomium und Kombinationen.

Zweiter Abschnitt.

Vier Species in Ganzen.

§. 6.

Entgegengesetzte Größen sind solche Größen von einerlei Art, die sich bei ihrer Verbindung vermindern; z. B. Vermögen und Schulden, Einnahme und Ausgabe sind zwei Größen von einerlei Art, weil sie sich auf Geld beziehen; Vor- und Rückwärtsschreiten (Bewegung), Steigen und Fallen, Auf- und Niedergang ꝛc. Es ist ganz gleichgiltig, von welcher Größe man in der Vergleichung ausgehen will. Jene Größe, von der man ausgeht, heißt bejahend (positiv, +), die andere aber verneinend (negativ, —). Somit sind Vermögen, Einnahme, Vorschreiten, Steigen, Aufgang bejahende, und Schulden, Ausgabe, Rückwärtsgehen, Fallen, Niedergang ꝛc. verneinende Größen, falls man von den erstern ausgehen will. Addiren ist in Bezug auf Abziehen positiv, dieses auf jenes negativ.

Hier trifft man auf zwei Sätze: 1) Gleiche und entgegengesetzte Größen heben einander auf, sind Null gleich. Denn wenn Jemand 8 fl. Vermögen besitzt, und 8 fl. Schulden hat, so hat er nichts; wenn Jemand 9 Schritte vorwärts und 9 Schritte rückwärts machte, steht er auf dem nämlichen Puncte und sein zurückgelegter Weg ist = Null; mithin ist »A« und »nicht A« zusammengezählt = Null.

2) Verbindet man ungleiche entgegengesetzte Größen, so hat man als Summe so viel, als der Ueberschuß der einen über die andere beträgt; z. B. 18 fl. Schulden und 10 fl. Vermögen geben zusammengezählt 8 fl. Schulden, weil der Ueberschuß der Schulden über das Vermögen = 8 ist; 24 fl. Schulden und 30 fl. Vermögen geben in der Summe 6 fl. Vermögen, da der Ueberschuß des Vermögens über die Schulden = 6 ist.

Wenn man also Schulden wegziehen soll, so ist dieses eben so viel, als Vermögen machen; z. B. ich soll von 25 fl. Vermögen 24 fl. Schulden abziehen. Das heißt nicht: Wenn ich 25 fl. Vermögen besitze und 24 fl. Schulden habe; so habe ich eigentlich nur 1 fl. Vermögen; darf ich aber die 24 fl. Schulden nicht bezahlen, so habe ich 25 fl. Vermögen, nämlich: 1 fl. Vermögen und 24 fl. Nicht-Schulden = 1 fl. V. und 24 fl. V. = 25 fl. V. Sondern: Es ist 25 fl. V. weniger 24 fl. Schulden = 25 fl. V. mehr 24 fl. V. = 49 fl. V. = 25 — (— 24) = 25 + 24 = 49; und es ist die Sache hier so gemeint, daß man die Schuld zu 24 fl. nicht bloß nachlasse, sondern das Negative in ein gleiches Positives umändere und 24 fl. Vermögen herschenke. Wenn man darnach von 12 fl. Vermögen 12 fl. Schulden abziehen soll; so ist das so viel, als zu 12 fl. V. noch 12 fl. V. erhalten = 24 fl. V., oder: 12 — (— 12) = 12 + 12 = 24.

Geht Jemand 6 Schritte voran und 6 Schritte nicht zurück; so macht er offenbar 12 Schritte voran 6 — (— 6) = 12 = 6 + 6. Besitzt ein Vermögensloser Schulden, so hat er nicht einmal Nichts; sondern um Nichts zu bekommen, muß er erst so viel erhalten, als er schuldet. Caesar dictator aere alieno oppressus, dixit: bis millies et quingentiès centena millia (numûm seu sestertiorum = 25.000.000 fl. = 250.000.000 Sechser) sibi esse oportere, ut nihil haberet. Nur in der Wechselbeziehung ist eine negative Größe weniger als nichts, anders betrachtet aber nicht.

§. 7.

Addition.

Gleichartige Größen sind solche, welche gleiche Buchstaben und gleiche Exponenten haben; z. B. $6a^3$ und $7a^3$ sind gleichartige Größen; dagegen sind a und a^2, b und c rc. ungleichartig.

Die **Regeln** der Addition der Buchstabengrößen sind folgende:

1) Nur gleichartige Größen kann man addieren; ungleichartige Größen schreibt man mit ihren Zeichen neben einander; z. B. $m + 2n$.

2) Haben die gleichartigen Größen gleiche Zeichen, so addiert man die Coefficienten, und gibt der Summe das gleiche Zeichen; z. B.

$$\begin{array}{r} +16a \\ +17a \\ \hline +33a \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} -9b^2 \\ -2b^2 \\ \hline -11b^2. \end{array}$$

3) Haben die gleichartigen Größen verschiedene Zeichen, so zieht man die Coefficienten von einander ab, und gibt dem Reste das Zeichen der größern Größe; z. B.

$$\begin{array}{r} +24a \\ -24a \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +25c^3 \\ -16c^3 \\ \hline +9c^3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -9ab \\ +5ab \\ \hline -4ab. \end{array}$$

1. Beispiel.

$$\begin{array}{rl} & 25ab - 6c^2 + 7d - f + g - 3 \\ & 14ab - 7c^2 - 9d + 3f - h + 5 \\ \hline \text{Summe} = & 39ab - 13c^2 - 2d + 2f + g - h + 2. \end{array}$$

Ist $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$, $f = 5$, $g = 6$, $h = 7$; so hat man:

$$\begin{array}{l} 25.1.2 - 6.3^2 + 7.4 - 5 + 6 - 3 = 45 \\ 14.1.2 - 7.3^2 - 9.4 + 3.5 - 7 + 5 = -14 \\ \hline 39.1.2 - 13.3^2 - 2.4 + 2.5 + 6 - 7 + 2 = 31. \end{array}$$

2. Beispiel.

$$\begin{array}{rl} & 25abn - 9c + 13f - h^2 - 9 \\ & -26abn + 9c - 9g + h^3 + 8 \\ & 30abn - 6c + 4f - 3h^2 - 6 \\ \hline \text{Summe} = & 29abn - 6c + 17f - 9g - 4h^2 + h^3 - 7. \end{array}$$

3. Beispiel.

$$\begin{array}{l} 225b^cm - 6abc + 9f - 14h^2 - k + 1 \\ -500b^cm - 6abc - 19f + 24h - 2k + 2 \\ 54b^cm - 19abc + 16f - h - l - 9 \\ 16b^cm - 21abc + f^2 - 3h - 4l + 18 \\ \hline \end{array}$$

Summe?

4. Beispiel.

$$\begin{array}{l} 22 - 39 + 45 - 9 - 6 + 11 - 317 \\ -91 + 14 - 15 - 10 + 16 + 19 - 14 \\ -16 - 17 + 18 + 23 - 8 - 1 + 5 \\ \hline \end{array}$$

Summe?

§. 8.

Subtraction.

Die Regel der Subtraction ist folgende: Man ändert im Subtrahend die Zeichen in ihr Gegentheil und addiert (§. 6.); z. B.

$$\begin{array}{ll} \text{Minuend:} & 25a^2b - 6b^3c + 8fm - gh + k - 9 \\ \text{Subtrahend:} & -4a^2b - 16b^3c - 9fm - gh - 9k + 6 \\ & \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad - \\ \hline \text{Rest} & 29a^2b + 10b^3c + 18fm = +10k - 15. \end{array}$$

Probe des 2ten Additionsbeispieles.

$$\begin{array}{l} 25abn - 9c + 13f - h^2 - 9 \\ \hline -26abn + 9c - 9g + h^3 + 8 \\ 30abn - 6c + 4f - 3h^2 - 6 \\ \hline 29abn - 6c + 17f - 9g - 4h^2 + h^3 - 7 \\ +4abn + 3c - 9g + 4f + h^3 - 3h^2 + 2 \\ - \quad - \quad + \quad - \quad - \quad + \quad - \\ \hline 25abn - 9c + 13f - h^2 - 9. \end{array}$$

Eben so mache man die Probe des 3. und 4. Additionsbeispieles.

1. Beispiel.

$$\begin{array}{l} 25a - 6b^2 - cd + e - m \\ -13a - 14b^2 + 2cd - f + m \\ + \quad + \quad - \quad + \quad - \\ \hline \text{Rest} = 38a + 8b^2 - 3cd + e + f - 2m. \end{array}$$

Probe.

$$\begin{array}{l} -13a - 14b^2 + 2cd - f + m \\ 38a + 8b^2 - 3cd + e + f - 2m \\ \hline 25a - 6b^2 - cd + e - m. \end{array}$$

2. Beispiel.

$$\begin{array}{l} ae - fg + 2^3.g - 4f - m - n - 1 \\ 2ae - 3fg - 2^4.g - 4f + m + n - 2 \\ - \quad + \quad + \quad + \quad - \quad - \quad + \\ \hline \text{Rest} = -ae + 2fg + 24g - 2m - 2n + 1. \end{array}$$

3. Beispiel.

Jemand nahm ein: 4 Kronthaler, 6 fl. 7 kr. 2 hlr. und gab aus: 1 Kronthlr., 9 fl. 17 kr. 5 hlr.; was hat er noch?

Kronthlr.		fl.		kr.		hlr.
4	+	6	+	7	+	2
— (1	+	9	+	17	+	5)
Rest = 3	—	3	—	10	—	3

Er hat noch 3 Krthlr., weniger 3 fl. 10 kr. 3 hlr. oder 4 fl. 55 kr. 5 hlr.

4. Beispiel.

Man ziehe von der compleren Größe $(3a - 4b)$ die complere Größe $(5a - 6b + c)$ ab. Es ist $(3a - 4b) - (5a - 6b + c) = 3a - 4b - 5a + 6b - c = -2a + 2b - c =$ Rest.

§. 9.

Wenn $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ die halbe Summe zweier Größen a, b; und $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$ die halbe Differenz (Unterschied) eben dieser Größen ausdrückt: so erhält man die größere a durch Addition, und die kleinere b durch Subtraction dieser Ausdrücke; denn:

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \\ \hline a & - \quad + \\ & \overline{\quad b \quad} \end{array}$$

Z. B. zwei Personen zählen mit einander 100 Jahre, jedoch ist eine dieser Personen um 4 Jahre älter, als die andere. Wie alt ist nun jede derselben?

Ausrechnung und Probe.

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2}\cdot 100 + \frac{1}{2}\cdot 4 = 52 & \frac{1}{2}\cdot 100 + \frac{1}{2}\cdot 4 = 52 \\ \frac{1}{2}\cdot 100 - \frac{1}{2}\cdot 4 = 48 & \frac{1}{2}\cdot 100 - \frac{1}{2}\cdot 4 = 48 \\ \hline 100 \text{ Jahre} & - \qquad + \qquad - \\ & \overline{\quad 4 \text{ Jahre} \quad} \end{array}$$

Folglich war eine Person 52, und die andere 48 Jahre alt.

Zwei Winkel halten zusammen 108° 56′, sind aber um 5° 47′ verschieden. Wie groß ist jeder derselben?

Zwei Freunde besitzen mit einander 27876 fl. 45 kr. 3 hlr.

Aber einer ist um 4787 fl. 5 hlr. reicher, als der andere. Wieviel hat nun ein jeder?

§. 10.

Decadische Ergänzung.

Die decadische Ergänzung (bei den Logarithmen anwendbar) ist jene Größe, die zu einer gegebenen Größe gezählt, die nächsthöhere Einheit gibt. Die nächsthöhere Einheit aber ist bei ächten Brüchen = 1; bei Ganzen eine Zahl von 1 und angehängten Nullen, also 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 ꝛc. Z. B. wenn ich zu der gegebenen Größe $N = 4$ die Größe $C = 96$ zähle, so daß $U = 100$ erscheint; so ist C zu N oder 96 zu 4 und umgekehrt die decadische Ergänzung oder das decadische Complement.

Also ist $N + C = U$. Man findet nun das Complement, wenn man die gegebene Zahl von der nächsthöhern Einheit wegzieht; denn

$$\begin{array}{rcl} N + C & = & U \\ N & = & N \quad (\S.\ 4,\ \text{nro. } 4.) \\ - & & - \\ \hline C & = & U - N. \end{array}$$

Welches ist die decadische Ergänzung von 14?
$N = 14$, $U = 100$; $C = U - N = 100 - 14 = 86$.

Welches ist die decadische Ergänzung von 712?
$N = 712$, $U = 1000$; $C = U - N = 288$.

Um vermittelst der decadischen Ergänzung abzuziehen, besteht die Regel: Man addiere zum Minuend die decadische Ergänzung des Subtrahendes, und ziehe von der erhaltenen Summe die nächsthöhere Einheit des letzteren ab; denn

$$\begin{array}{rcl|rcl} N + C & = & U & A & = & A \\ C & = & C & N & = & U - C \\ - & & - & - & & - \; + \\ \hline N & = & U - C & A - N & = & A + C - U. \end{array}$$

Z. B. Man ziehe von 4567 die Zahl 4 decadisch ab; $N = 4$, $A = 4567$; $C = 6$, $U = 10$; mithin wird $4567 - 4 = 4567 + 6 - 10 = 4563$.

Man ziehe von $\frac{3}{4}$ den Bruch $\frac{2}{3}$ decadisch ab; $A = \frac{3}{4}$; $N = \frac{2}{3}$; $U = 1$; $C = \frac{1}{3}$; also $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{3}{4} + \frac{1}{3} - 1 = \frac{1}{12}$.

Mittels der decadischen Ergänzung kann man eine Reihe von Größen, deren Zeichen verschieden (+) und (—) sind, leichter summieren, da alle (—) in (+) verwandelt werden;

z. B. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} \ldots$ Nämlich:

$1 = 1$
von $\frac{1}{3}$ ist die dec. Erg. $\frac{2}{3}$
$\frac{1}{5} = \frac{1}{5}$
von $\frac{1}{7}$ ist die dec. Erg. $= \frac{6}{7}$
$\frac{1}{9} = \frac{1}{9}$
v. $\frac{1}{11}$ ist die dec. Erg. $\frac{10}{11}$
$\frac{1}{13} = \frac{1}{13}$
v. $\frac{1}{15}$ ist die dec. Erg. $\frac{14}{15}$
$\frac{1}{17} = \frac{1}{17}$
v. $\frac{1}{19}$ ist die dec. Erg. $\frac{18}{19}$.

Nun ist $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} \ldots = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{6}{7} + \frac{1}{9} + \frac{10}{11} + \frac{1}{13} + \frac{14}{15} + \frac{1}{17} + \frac{18}{19} - 5U (= -5 \times 1)$. Das Uebrige zur Uebung im Zahlencalcul!

Ingleichem: $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 = 1 + 8 + 3 + 6 + 5 + 4 + 7 - 3U (= -3 \times 10)$.

§. 11.

Multiplication und Division einfacher Größen.

Die Regel der **Multiplication** einfacher Größen ist folgende:

1) Man multipliciere die Coefficienten mit einander;

2) man addiere die Exponenten gleicher Buchstaben;

3) ungleiche Buchstaben schreibe man unmittelbar an=einander;

4) gleiche Zeichen machen in der Multiplitation und Division (+), ungleiche (—); signa eadem dant plus, signaque versa minus; z. B. $-21ab^2d \times -4a^2b^3c = (+)\ 84a^3b^5cd$; $-6m^n p \times (+)\ 3m^m q = -18m^{m+n}pq$; $a^2 \times 6a^4 = 6a^6$.

Daß man die Exponenten gleicher Buchstaben addieren muß, zeigt man so:

$a^3 = aaa$ (§. 3)
$a^2 = aa$ (§. 3)

$a^3 \times a^2 = aaaaa = a^5 = a^{3+2}$.

Daß gleiche Zeichen (+) und ungleiche Zeichen (—) machen, beweiset man, wie folgt:

I. $a \times 4 = a + a + a + a = 4a$;
II. $-a \times -4 = -(-a-a-a-a) = -(-4a) = 4a$;
III. $-a \times +4 = -a-a-a-a = -4a$.

1. Beispiel.

$6a^3 \times -7ab = -42a^4b$. Wenn $a = 2$ und $b = 3$, so $6 . 2^3 \times -7 . 2 . 3 = -42 . 2^4 . 3 = 6 . 8 \times -7 . 6 = -2016$.

2. Beispiel.

$7a^3b^2cd \times 9a^4b^3c^2f = ?$

Die Regel der Division einfacher Größen besteht darin, daß man

1) die Coefficienten dividirt, jenen des Dividends mit jenem des Divisors;

2) daß man die Exponenten gleicher Buchstaben abzieht, jenen des Divisors von jenem des Dividends;

3) daß man ungleiche Buchstaben bruchartig anschreibt, jenen des Divisors unter den des Dividends; z. B.

$$-24a^3b^4c : 6a^2b^3f = -4ab\frac{c}{f} = 4abc : f.$$

Die Exponenten gleicher Buchstaben werden nach nro. 2 deßwegen abgezogen:

$$\begin{aligned} a^5 &= aaaaa \\ a^2 &= aa \end{aligned}$$

$$a^5 : a^2 = \frac{aaaaa}{aa} = aaa = a^3 = a^{5-2}.$$

Wenn man nun a mit a theilen soll, so ist offenbar $a : a = a^{1-1} = a^0 = 1$, d. h. jede Größe, zu Null erhoben, ist die Einheit.

Wenn man a^m mit a^{2m} dividieren soll, so wird nach der Regel:

$$a^m : a^{2m} = a^{m-2m} = a^{-m} = \frac{a^m}{a^m \times a^m} = \frac{1}{a^m};$$ d. i. eine Größe mit negativem Exponenten ist einem Bruche gleich, dessen Zähler 1, und dessen Nenner die Größe mit positivem Exponenten ist.

Also ist z. B. $3^{-1} = \frac{1}{3^1}$, $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$, $3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$, und $\frac{2}{3} = 2 \times 3^{-1}$; $\frac{5}{64} = 5 \times 8^{-2} = 5 \times 4^{-3}$ (§. 3).

1. Beispiel.

$25a^3b^4c : 5abd = 5a^2b^3c : d$; wenn $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$, so ist $25 \cdot 1^3 \cdot 2^4 \cdot 3 : 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 = 5 \cdot 1^2 \cdot 2^3 \cdot \frac{3}{4} = 5 \cdot 1 \cdot 8 \cdot \frac{3}{4} = 5 \cdot 2 \cdot 3 = 30.$

2. Beispiel.

$1728a^4b^5c^3m : -\, 144a^2b^3cn = ?$

§. 12.

Multiplication complexer Größen.

Man multipliciere nach §. 11 mit jedem Gliede des Multiplicators jedes Glied des Multiplicands, und addiere die Producte; z. B.

$$\begin{array}{rl}
 & 5a^3 - 6g^2 + 5h^4 - 6 = \text{Multiplicand,} \\
 & -\,4a + 5g^3 - d \quad = \text{Multiplicator,} \\
\hline
\text{Producte}\left\{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right. &
\begin{array}{l}
-\,20a^4 + 24ag^2 - 20ah^4 + 24a \\
\qquad\quad + 25a^3g^3 - 30g^5 + 25g^3h^4 - 30g^3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad - 5a^3d + 6dg^2 - 5dh^4 + 6d
\end{array} \\
\hline
\end{array}$$

Product $= -\,20a^4 + 24ag^2 - 20ah^4 + 24a + 25a^3g^3 - 30g^5 + 25g^3h^4 - 30g^3 - 5a^3d + 6dg^2 - 5dh^4 + 6d.$

1. Beispiel.

$$\begin{array}{l}
5 + a^2 - b^3 \\
5 + a^2 - b^3 \\
\hline
25 + 5a^2 - 5b^3 \\
\quad\; + 5a^2 + a^4 - a^2b^3 \\
\qquad\quad - 5b^3 - a\,b^3 + b^6 \\
\hline
25 + 10a^2 + a^4 - 10b^3 - 2a^2b^3 + b^6.
\end{array}$$

2. Beispiel.

$$\begin{array}{l}
\quad\; 5 - a^2 + b^2 \\
-\,5 + a^2 - b^2 \\
\hline
-\,25 + 5a^2 - 5b^2 \\
\qquad + 5a^2 - a^4 + a^2b^2 \\
\qquad\qquad - 5b^2 + a^2b^2 - b^4 \\
\hline
-\,25 + 10a^2 - a^4 - 10b^2 + 2a^2b^2 - b^4.
\end{array}$$

3. Beispiel.

$$\begin{array}{l}
\quad a^2 + 2a^2b + ab^2 \\
\times\; a^2 + 2a^2b + ab^2 \\
\hline
\quad ?\ \text{Product.}
\end{array}$$

Wenn man $a + b$ mit $a - b$ multipliciert, nämlich:

$$\begin{array}{rl} & a - b \\ & a + b \\ \hline & a^2 - ab \\ & \quad + ab - b^2 \\ \hline & a^2 - b^2; \end{array}$$

so erhält man eine Differenz der Quadrate als Product. Mithin ist die Differenz (Unterschied) zweier Quadrate gleich dem Producte aus der Summe in die Differenz der Wurzeln; d. h. $a^2 - b^2 = a + b \,.\, a - b = (a + b)(a - b)$. Somit $4 - 1 = (2 + 1)(2 - 1) = 3$ (§. 3) $= 2^2 - 1^2$; ferner: $16 - 9 = 4^2 - 3^2 = 4 + 3 \,.\, 4 - 3 = 7$; $144 - 16 = 12^2 - 4^2 = 12 + 4 \,.\, 12 - 4 = 128$.

Fragt man sohin nach der Auflösung eines Productes z. B. $a^2 - b^2$ in seine Factoren; so will man diejenigen Größen wissen, durch deren Multiplication jenes Product erscheint.

§. 13.

Division complexer Größen.

Man dividirt mit dem ersten Theile des Divisors in den ersten Theil des Dividends nach §. 11.; dann multipliciert man den ersten Quotus mit dem ganzen Divisor, und zieht das Product vom Dividend ab; bleibt ein Rest, so dividiert man wieder mit dem ersten Theile des Divisors in den ersten Theil des Restes, multipliciert mit dem zweiten Quotus den ganzen Divisor, und zieht das erhaltene Quantum wieder ab u. s. f. bis zum Schlusse, nach dem Verse: divide, multiplica, subtrahe, pone loca! z. B.

$$\begin{array}{l|l|l} \text{Divisor} & \text{Dividend} & \text{Quotus.} \\ 5 + a^2 - b^3 & 25 + 10a^2 + a^4 - 10b^3 - 2a^2b^3 + b^6 & 5 + a^2 - b^3 \\ & 25 + 5a^3 - 5b^3 & \\ & - \;\; - \quad\;\; + & \\ \hline & \quad 5a^2 - 5b^3 \qquad + a^4 & \\ & \quad 5a^2 + a^4 \qquad - a^2b^3 & \\ & - \quad - \qquad\qquad + & \\ \hline & - 5b^2 - a^2b^3 \qquad + b^6 & \\ & - 5b^2 - a^2b^3 \qquad + b^6 & \\ & + \quad + \qquad\qquad - & \\ \hline & \;\; - \quad\; - \qquad\quad - & \end{array}$$

1. Beispiel.

Wenn man das Product zweier Größen mit einem

Factor dividiert, so kommt der andere Factor zum Vorscheine; sieh §. 12., 2tes Beispiel:

$$: +5 - a^2 + b^2 \;\big|\; -25 + 10a^2 - a^4 - 10b^2 + 2a^2b^2 - b^4 \;\big|\; -5 + a^2 - b^2$$
$$-25 + 5a^2 - 5b^2$$
$$+ \quad - \quad +$$
$$5a^2 - a^4 - 5b^2$$
$$5a^2 - a^4 + a^2b^2$$
$$- \quad + \quad -$$
$$-5b^2 + a^2b^2 - b^4$$
$$-5b^2 + a^2b^2 - b^4$$
$$+ \quad - \quad +$$
$$- \quad - \quad -$$

So dividiere man §. 12 das 3te Beispiel!

2. Beispiel.

$$: 3m^2 + cdg^3 \;\big|\; 9m^4 + 6cdg^3m^2 - c^2d^2g^6 \;\big|\; 3m^2 + cdg^3$$
$$9m^4 + 3cdg^3m^2$$
$$- \quad -$$
$$3cdg^3m^2 - c^2d^5g^6$$
$$3cdg^3m^2 + c^2d^2g^6$$
$$- \quad -$$
$$\text{Rest} = -2c^2d^2g^6.$$

Die Probe der Division wird gemacht, wenn man den Quotus mit dem Divisor multipliciert, und den beim Dividieren gebliebenen Rest einzählt, um den Dividend zu erhalten; nämlich:

$$3m^2 + cdg^3 = \text{Quotus}$$
$$\times\; 3m^2 + cdg^5 = \text{Divisor}$$
$$9m^4 + 3cdg^3m^2$$
$$+ 3cdg^3m^2 + c^2d^2g^6$$
$$9m^4 + 6cdg^3m^2 + c^2d^2g^6$$
$$- 2c^2d^2g^6 = \text{Rest}$$
$$\text{Dividend} = 9m^4 + 6cdg^3m^2 - c^2d^2g^6.$$

3. Beispiel.

$$a - b - c \;\big|\; a^2 - b^2 - 2ac + c^2 \;\big|\; a + b - c$$
$$a^2 - ab - ac$$
$$- \quad + \quad +$$
$$ab - b^2 - ac$$
$$ab - b^2 - bc$$
$$- \quad + \quad +$$
$$- ac + bc + c^2$$
$$+ ac - bc - c^2$$

4. Beispiel.

Dividend: $12a^7 + 26a^6b + 10a^5b^2 - 24a^5d - 12a^4bd$,
Divisor: $4a^3 + 2a^2b$,
Quotus $= ?$

§. 14.

Quotusreihen.

Es gibt Divisionsfälle, wo der Quotus niemals ganz erschöpft werden kann, sondern wo derselbe eine unendliche Menge nach einem gewissen Gesetze fortlaufender Größen — Reihe (series) — bildet; z. B. $1 : (1 - x) = \frac{1}{1 - x}$;

Divisor Divid. Quotient

$$
\begin{array}{l|l|l}
: 1 - x & 1 & 1 + x + x^2 + x^3 \ldots\ldots\ldots \\
 & 1 - x & \\
 & - \; + & \\
\hline
 & x & \\
 & x - x^2 & \\
 & - \; + & \\
\hline
 & x^2 & \\
 & x^2 - x^3 & \\
 & - \; + & \\
\hline
 & x^3 & \\
 & x^3 - x^4 \qquad (\text{Rest} = x^4). & \\
 & - \; + &
\end{array}
$$

Ist n die Anzahl der Glieder, so ist x^{n-1} das **allgemeine Glied** (terminus generalis) der Reihe; z. B. für $n = 4$ ist $x^{4-1} = x^3$ das vierte Glied; für $n = 1$ ist $x^{1-1} = x^0 = 1$ (§. 11) das erste Glied.

Setzt man $x = 1$, so ist

$$\frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \ldots\ldots = \infty \text{ (§. 4)}.$$

Daraus folgt aber nicht, daß $0 \times \infty = 1$, weil die Grenze (0) der Abnahme des Nenners nie gänzlich erreicht wird, also auch nicht jene (∞) der Zunahme, wie man sieht, wenn der Nenner nacheinander 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$, $\frac{1}{128}$, $\frac{1}{256}$, $\frac{1}{512}$, $\frac{1}{1024}$, $\frac{1}{2048}$, $\frac{1}{4096}$ ...... ist.

Man dividiere ferner 1 durch $1 + x$. Man erhält $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^4 + x^5 - x^6 \ldots\ldots;$

denn:

$$
\begin{array}{l}
: 1 + x \mid 1 \mid 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 \ldots \\
\quad 1 + x \\
\quad - \;\; - \\
\hline
\quad - x \\
\quad - x - x^2 \\
\quad + \;\; + \\
\hline
\quad x^2 \\
\quad x^2 + x^3 \\
\quad - \;\; - \\
\hline
\quad - x^3 \\
\quad - x^3 - x^4 \\
\quad + \;\; + \\
\hline
\quad x^4 \\
\quad x^4 + x^5 \\
\quad - \;\; - \\
\hline
\quad - x^5 \\
\quad - x^5 - x^6 \\
\quad + \;\; + \\
\hline
\quad x^6 \\
\quad x^6 + x^7 \\
\quad - \;\; - \\
\hline
\quad - x^7 = \text{Rest.}
\end{array}
$$

Wird $x = 1$ gesetzt, so hat man $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots\ldots\ldots$ Hieraus darf man mit dem übrigens geschickten Mathematiker Guido Grandi nicht voreilig schließen, daß $\frac{1}{2} = 0 + 0 + 0 + 0 \ldots\ldots = 0$ sei, da die Division niemals aufhört. Bricht man z. B. beim siebenten Gliede ab, so ist $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \frac{1}{1+1} = 0 + 0 + 0 = + \frac{1}{2}$; bricht man beim sechsten Glied ab, so wird $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \frac{1}{1+1} = 0 + 0 + 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Durch solche Betrachtungen wird man sich jeden Falles vor Trugschlüssen bewahren können.

Man dividiere 1 durch $1 + x - x^2$!

$$1 + x - x^2 \mid 1 \mid 1 - x + 2x^2 - 3x^3 + 5x^4 - 8x^5 + 13x^6 \ldots\ldots$$

$$1 + x - x^2$$
$$- \quad - \quad +$$
$$-x + x^2$$
$$-x - x^2 + x^3$$
$$+ \quad + \quad -$$
$$2x^2 - x^3$$
$$2x^2 + 2x^3 - 2x^4$$
$$- \quad - \quad +$$
$$-3x^3 + 2x^4$$
$$-3x^3 - 3x^4 + 3x^5$$
$$+ \quad + \quad -$$
$$5x^4 - 3x^5$$
$$5x^4 + 5x^5 - 5x^6$$
$$- \quad - \quad +$$
$$-8x^5 + 5x^6$$
$$-8x^5 - 8x^6 + 8x^7$$
$$+ \quad + \quad -$$
$$13x^6 - 8x^7$$
$$13x^6 + 13x^7 - 13x^8$$
$$- \quad - \quad +$$
$$\text{Rest} = -21x^7 + 13x^8.$$

Man dividiere 1 mit $1 - x^2$!

Ferner: $\frac{1}{1 + x^2}$!

Dann: 1 durch $1 - x + x^2$!

Dritter Abschnitt.

Theilbarkeit der Zahlen.

§. 15.

Theilbar ist die Zahl A durch die Zahl B, wenn B ein- oder mehrmal genau in A enthalten ist; z. B. 24 ist durch 8 theilbar, weil 3 mal 8 = 24. Ist B in A n mal enthalten, so ist B ein **Maß** von A; 8 ist ein Maß von 24.

Eine **Primzahl** (numerus primus) ist jene Zahl, die nur durch 1 oder durch sich selbst theilbar ist; z. B. 17. Ist m jede beliebige ganze Zahl, so ist $6m \pm 1$ eine Prim-

zahl; es sei m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; so sind 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53 Primzahlen.

Relative Primzahlen sind solche Zahlen, die zugleich mit keiner Zahl theilbar sind; z. B. 4 und 9.

Eine zusammengesetzte Zahl (numerus compositus) ist jene, die außer 1 und sich selbst Maße hat; z. B. 24, theilbar durch 2, 3, 4, 6, 8, 12.

Gemeines Maß zweier Zahlen ist jene Zahl, die beide zugleich theilt; z. B. 4 ist ein gemeines Maß zu 40 und 60; denn 40 : 4 = 10 und 60 : 4 = 15.

Größtes gemeines Maß zweier Zahlen ist jene Zahl, welche beide so theilt, daß die Quoten relative Primzahlen (Primzahlen unter sich) sind; z. B. 20 ist das größte gemeine Maß zu 40 und 60, weil 40 : 20 = 2 und 60 : 20 = 3, wo 2 und 3 relative Primzahlen sind; ferner ist 8 das größte gemeine Maß zu 40 und 112, weil 40 : 8 = 5 und 112 : 8 = 14.

§. 16.

Sind zwei Zahlen A und B so beschaffen, daß B ein Maß von A ist; so ist auch, wenn m eine ganze Zahl bedeutet, B ein Maß vom mA; z. B. 6 ist ein Maß von 24, also auch, wenn m = 32, von 32 × 24 oder von 768, da 768 : 6 = 128; denn ist A : B = n, so ist klar, daß mA : B = mn.

Gesetzt nun, M sei ein Maß zu den Zahlen A und B, und es gebe A : M den Quotus Q und B : M den Quotus q; so ist das Product des Maßes in die Quoten durch A sowohl als B theilbar; d. h. MQq : (A, B). Z. B. 4 sei Maß zu 8 und 12, und 2 und 3 seien die Quoten; so ist 4 . 2 . 3 oder 24 durch 8 sowohl als 12 theilbar. Denn A : M = Q, und A = MQ, und MQ : A, also auch qMQ : A; ferner B : M = q, somit B = Mq, und Mq : B, mithin auch QMq : B.

Diese Betrachtung führt dahin, die kleinste Zahl (minimus dividuus) zu finden, die durch gegebene Zahlen theilbar ist; z. B. welches ist der minimus dividuus der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

M	A . . . . . . B	
	Q	q
	MQq : A;	MQq : B; also

2	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9
		1		2		3		4	
3			1			1			3
2				1				2	
5					1				1
7							1		

Mithin ist als kleinste Zahl $2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 5 \times 7 = 2520$ mit 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 theilbar.

§. 17.

Das gemeine Maß des Divisors und Restes ist auch ein Maß des Dividends; z. B.

60	70	1
	60	
	10	

Weil 10 das Maß zu 60 und 10 (Divisor und Rest) ist, so ist 10 auch Maß zu 70 (Dividend). Denn wenn d Divisor, D Dividend, q Quotus und R der Rest ist; so ist $dq + R = D$ (§. 13, 2. Beisp.). Ist nun M das Maß zu d und R, so muß M auch Maß zu D sein, damit die Gleichheit aufrecht erhalten wird; nämlich: $dq : M + R : M = D : M$.

Eben so, wenn der Divisor und Dividend das Maß M haben, hat der Rest das nämliche Maß M; denn wenn $d : M$ und $D : M$; so muß der Gleichheit wegen wieder $R : M$; nämlich: $dq : M + R : M = D : M$.

§. 18.

Aus dem vorigen §. folgt einerseits die Auffindung des größten gemeinen Maßes zweier Zahlen, andererseits die Verkleinerung der Zahl. Das größte gemeine Maß zweier Zahlen wird so gefunden: Man theilt mit der kleinern Zahl in die größere, dann fortwährend mit dem bleibenden Reste in den vorherigen Divisor so lange, bis es aufgeht; dann ist der letzte Divisor das größte gemeine Maß dieser Zahlen; z. B. 360; 1155.

360	1155	3									
	1080										
		75	360	4							
			300								
				60	75	1					
					60						
						15	60	4			
							60				
							—				

Es ist nun 15 das größte gemeine Maß zu 360 und 1155, da die Quoten 24 und 77 relative Primzahlen sind. Es hat nämlich 15 (als Rest) die Zahl 60 (als Divisor) getheilt, mithin auch den Dividend 75; 15 theilt ferner 60 und 75 (Rest und Divisor), also auch 360 (Dividend); endlich theilt 15 die Zahlen 75 und 360 (Rest und Divisor), mithin auch den Dividend 1155.

Zur Uebung suche man das größte gemeine Maß der Zahlen 28; 772, und verkleinere sie mit demselben!

§. 19.

Wenn a, b, c, d, e, f .... Ziffern und a, 10b, 100c, 1000d, 10000e, 100000f .... ihren Local- oder Ortswerth ausdrücken, so ist jede ganze Zahl in der Form $a + 10b + 100c + 1000d + 10000e + 100000f \ldots$ begriffen; z. B. 257916, wo $a = 6$, $b = 1$, $c = 9$, $d = 7$, $e = 5$, $f = 2$ ist, wird $= 6 + 10 \cdot 1 + 100 \cdot 9 + 1000 \cdot 7 + 10000 \cdot 5 + 100000 \cdot 2 = 6 + 10 + 900 + 7000 + 50000 + 200000 = 257916$. Dividiert man nun nach einander mit den ersten 10 Zahlen nach (1) in jenen Ausdruck, so geben die jedesmaligen Reste eine Regel an, welche Zahlen mit 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 theilbar seien, indem auch der Rest mit diesen Zahlen theilbar ist, wenn es diese Zahlen mit sich als Divisoren und wenn es der obige Ausdruck als Dividend damit ist.

Divis.	Dividend. $a + 10b + 100c + 1000d + 10000e + 100000f \ldots$	
2	a	Reste.
3	$a + b + c + d + e + f$	
4	$a + 2b$	
5	a	
6	$a + 4b + 4c + 4d + 4e + 4f$	
7	$a + 3b + 2c + 6d + 4e + 5f$	
8	$a + 2b + 4c$	
9	$a + b + c + d + e + f$	
10	a	
11	$a - b + c - d + e - f$	

Aus vorstehender Tafel ersieht man, daß alle gerade Zahlen mit 2 theilbar sind; z. B. 2, 4, 6, 8, 10 ....; denn eine mit 2 theilbare Zahl heißt ja gerade, eine durch 2 nicht theilbare Zahl aber ungerade (par et impar), z. B. 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 .... Ist m jede

ganze Zahl, so ist 2m jede gerade, und 2m + 1 jede ungerade Zahl.

Mit 3 lassen sich alle Zahlen theilen, deren Ziffernsumme mit 3 aufgeht; z. B. 1371. Mit 9 lassen sich alle Zahlen theilen, deren Ziffernsumme mit 9 aufgeht; z. B. 1395.

Mit 4 lassen sich alle Zahlen theilen, deren Einheiten und doppelte Zehner zusammengezählt mit 4 aufgehen; z. B. 952. Mit 8 lassen sich alle Zahlen theilen, deren Einer, gedoppelte Zehner und 4fache Hunderte addiert mit 8 sich dividieren lassen; z. B. 6232. Es lassen sich alle auf 00 sich endigende Zahlen mit 4, und alle auf 000 ausgehende mit 8 theilen.

Mit 6 lassen sich alle Zahlen theilen, die zugleich mit 2 und 3 aufgehen; z. B. 126.

Mit 7 zu theilen, besteht folgende Regel (sieh Joh. Mich. Poetius arithm. Wissenschaft 1728, pag. 202): Man schneide die niedrigste Ziffer der Zahl rechts ab, tripliere die links stehen gebliebene mit immerwährender Abschneidung der niedrigsten Ziffer des Productes, und werfe die Siebner aus den abgeschnittenen Ziffern so oft hinaus, als möglich. Bleibt nichts übrig, so geht jene Zahl mit 7 auf; z. B. 1792. Die Ausarbeitung steht so:

× 3		
179	2	2 und 7 ist 9; 7 weg bleibt 2;
53	7	2 + 9 = 11, — 7 = 4; 4 +
15	9	5 = 9, — 7 = 2; 2 + 2 +
4	5	3 = 7, — 7 = 0.
1	2	
	3	

Denn wenn a die Einheiten und 10b das Uebrige einer Zahl bedeutet, so ist a + 10b jede ganze Zahl; z. B. 1792, wo a = 2 und b = 179, wird = 2 + 179 . 10 = 2 + 1790. Nun:

Divis.	Dividend a + 10b
7	a + 3b = Rest.

Mit 5 lassen sich alle auf 5 oder 0 sich endigende Zahlen, mit 10 alle auf 0 ausgehende Zahlen theilen.

Mit 11 kann man alle Zahlen theilen, deren addierte Einer, Hunderte, Zehntausende von den addierten Zehnern, Tausenden, Hunderttausenden ꝛc. abgezogen, mit 11 aufgehen; z. B. 2970; 39072. Also gehen mit 11 auf: 11, 22,

33, 44 . . . . . 99; ferner die dreizifferigen Zahlen, deren mittlere Ziffer der Summe der äußern gleich ist; z. B. 561; 165 u. s. w.

§. 20.

Da man nun weiß, welche Zahlen mit den Divisoren 2 bis 11 aufgehen; so kann man auch die kleinsten Theiler einer Zahl finden. Man dividiere nämlich der Ordnung nach mit den kleinsten dieser Divisoren fortwährend bis zum Quotus 1 in die Zahl, deren kleinste Theiler man sucht; z. B. welches sind die kleinsten Theiler von 90?

	90
:2	45
3	15
3	5
5	1

Also sind 2, 3, 3, 5 die kleinsten Theiler von 90 = $2 \times 3 \times 3 \times 5$. Wollte man nun eine Linie (einen Quadranten des Cirkels) in 90 gleiche Theile theilen; so halbiere man den Quadranten, theile die Hälften in 3 gleiche Theile, jeden dieser abermal in 3 gleiche Theile, endlich jeden dieser letzten Theile in 5 gleiche Theile (in binas, in tres, in tres, in quinque secato!).

Ferner ergibt sich hieraus noch eine Weise, das größte gemeine Maß zweier Zahlen zu finden und sie zu verkleinern; z. B. von 360 und 1155. Es ist 360 und 1155 mit 5 theilbar; die Quoten sind 72 und 231; 231 geht durch 11 auf, und 72 durch 12; die Quoten sind 6 und 21; 6 und 21 gehen mit 3 auf; die Quoten sind 2 und 7; 2 in 2 geht 1 mal und 7 in 7 ebenfalls 1 mal. Läßt man nun die gemeinsamen Maße (5 und 3) weg, und multipliciert die restierenden, nämlich: 2 mal 12 und 7 mal 11, so ist 24 und 77 schon die Verkleinerung und 15 das größte gemeine Maß. Die Rechnung steht also:

5)	360		5)	1155
	72			231
·12)	6		·11)	21
: 3)	2		: 3)	7
. 2)	1		. 7)	1
	24	(15 größtes gemeines Maß.)		77

Man suche das größte gemeine Maß zu den Zahlen 35 und 490, und ihr Verkleinertes!

5)	35	5)	490
7)	7	7)	98
1)	1	14)	14
	1		1

Also ist 35 = 5 × 7 ihr größtes gemeines Maß und 1 und 14 sind ihr Verkleinertes. Man hätte auch so verfahren können:

7)	35	7)	490
5)	5	5)	70
1)	1	14)	14
	1		1 *).

Vierter Abschnitt.

Vier Species in gemeinen Brüchen.

§. 21.

Ein Bruch ist ein oder mehrere Theile eines Ganzen. Denke ich eine Linie A, und nehme ihren a^ten gleichen Theil b mal; so erhalte ich b × (A : a) oder b mal $\frac{A}{a}$ $= \frac{b}{a}$ von A. Man heißt a den Nenner (nominator), weil er angibt, wie A (das Ganze) getheilt werden soll, und b den Zähler (numerator), weil er die Theile zählt. Ist der Gulden à 60 kr. in 4 gleiche Theile getheilt à 15 kr. und nimmt man den 4ten gleichen Theil 3 mal = 45 kr.; so ist $\frac{3}{4}$ fl. = $\frac{3}{4}$ von 1 fl. bestimmt worden = 45 kr.; sohin ist hier in diesem Beispiele A = 60, a = 4, b = 3 und $\frac{b}{a}$ von A = $\frac{3}{4}$ fl. = $\frac{3}{4}$. 60 = 45 kr. Der Werth der Brüche hängt somit vom Nenner und Zähler zugleich ab. Haben mehrere Brüche gleiche Nenner, so ist jener mit dem größten Zähler der größte; haben aber mehrere Brüche gleiche Zähler, so ist jener mit dem kleinsten Nenner der größte. Jedes Ganze ist als Bruch zu betrachten, wenn 1 der Nenner ist; z. B. A = A : 1 = $\frac{A}{1}$. Solche Brü-

*) Aus §. 20. löset sich ebenfalls die Aufgabe des §. 16. Nämlich es ist: 1 = 1; 2 = 1.2; 3 = 1.3; 4 = 2.2; 5 = 1.5; 6 = 2.3; 7 = 1.7; 8 = 2.2.2; 9 = 3.3. Mithin nach höchsten Potenzen 2.2.2.3.3.5.7 = 2520.

che, die ein Ganzes oder mehr betragen, heißen unächte oder uneigentliche (spuriae); z. B. $\frac{4}{4}$; $\frac{5}{4}$.

§. 22.

Eines jeden Bruches Zähler und Nenner darf man mit der nämlichen Größe multiplicieren oder dividieren; denn der Werth bleibt derselbe, weil der Zähler Dividend und der Nenner Divisor ist; z. B. $\frac{a}{c} = \frac{ad}{cd} = \frac{a : g}{c : g}$.

§. 23.

Ein gemischter Bruch ist jener, welcher vorstehende Ganze hat; z. B. $5\frac{3}{4} = 5 + \frac{3}{4}$; $a + \frac{b}{c}$.

Solche Brüche werden eingerichtet, wenn man das Ganze mit dem Nenner multipliciert, den Zähler einzählt und den Nenner unter diese Summe setzt; z. B. $5\frac{3}{4} = \frac{5 \times 4 + 3}{4} = \frac{20 + 3}{4} = \frac{23}{4}$; $a + \frac{b}{c} = \frac{ac + b}{c}$; denn $a = \frac{ac}{c}$, dazu noch $\frac{b}{c}$, $= \frac{ac}{c} + \frac{b}{c} = \frac{ac + b}{c}$.

Dagegen wird ein unächter Bruch in Ganze aufgelöset, wenn man den Zähler mit dem Nenner theilt; z. B. $\frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$; $\frac{bd \pm e}{d} = b \pm \frac{e}{d}$.

§. 24.

Brüche unter einerlei Benennung bringen heißt, für mehrere Brüche einen Nenner suchen, und die demselben entsprechenden Zähler bestimmen.

Man suche den minimus dividuus der Nenner (§. 16); in diesen kleinsten Dividend, den Generalnenner, theile man mit jedem Bruchnenner, und multipliciere die Quoten mit jedem Zähler. Dadurch erhält man neue, den gegebenen gleiche Brüche (§. 22); man bringe die Brüche $\frac{a}{4b}$, $\frac{c}{ab^1}$, $\frac{d}{2m}$, $\frac{5e}{8m^1}$, $\frac{5}{6}$ unter einerlei Benennung!

$$\begin{array}{r|lllll}
2 & \frac{a}{4b}, & \frac{e}{ab^2}, & \frac{d}{2m}, & \frac{5e}{8m^3}, & \frac{5}{6} \\
 & 2 & & & & \\
2 & 1 & & & 4 & 3 \\
b & 1 & b & & 2 & \\
m & & & 1 & m^2 &
\end{array}$$

Generalnenner: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3ab^2m^3 = 24ab^2m^3$; ferner $a \times \frac{24ab^2m^3}{4b} = 6a^2bm^3$, und $\frac{a}{4b} = \frac{6a^2bm^3}{24ab^2m^3}$; auf solche Weise wird $\frac{c}{ab^2} = \frac{24cm^3}{24ab^2m^3}$; $\frac{d}{2m} = \frac{12ab^2dm^2}{24ab^2m^3}$, $\frac{5e}{8m^3} = \frac{15ab^2e}{24ab^2m^3}$; $\frac{5}{6} = \frac{20ab^2m^3}{24ab^2m^3}$.

Will man zwei Brüche ihrer Größe nach vergleichen, z. B. $\frac{5}{6}$ und $\frac{9}{10}$, so bringe man sie unter einerlei Benennung; die neuen Zähler entscheiden die Bruchwerthe;

$$\begin{array}{r|ll}
2 & \frac{5}{6}, & \frac{9}{10} = \frac{25;\ 27}{30} = \frac{25}{30}, \frac{27}{30}; \text{ also ist } \frac{5}{6} < \frac{10}{10}. \\
 & 3 & 5
\end{array}$$

§. 25.

Ein Bruch wird mit einem Ganzen multipliciert, entweder wenn man den Zähler damit multipliciert, oder den Nenner mit demselben dividiert; z. B. $\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b} = \frac{a}{b : c}$. Denn im ersten Falle wird der Zähler größer, also der Bruch gleichfalls; im zweiten Falle wird der Nenner (Divisor) kleiner, also der Bruchwerth erhöht.

Ein Bruch wird mit einem Ganzen dividiert, entweder wenn man den Zähler damit theilt, oder den Nenner damit multipliciert; z. B. $\frac{a}{b} : c = \frac{a : c}{b} = \frac{a}{bc}$. Denn theilt man den Zähler, so wird der Bruch offenbar kleiner, da die Theile weniger oft genommen sind; und multipliciert man den Nenner, so wird durch die Vergrößerung des Divisors der Bruchwerth verringert.

Zur Uebung! $5\frac{7}{8} = ?$ $a \pm \frac{m}{n} = ?$ Unter einerlei Benennung zu bringen:

$$\frac{a}{10b} + \frac{2m}{3b^3} + \frac{5n^2}{4ab} + \frac{52cd}{15a^3n} + \frac{12m}{7abc}.$$

Welcher Bruch ist größer $\frac{113}{355}$ oder $\frac{7}{22}$?

Endlich: $24 \times \frac{5}{96} = ?$

$$a \times \frac{m^3}{a^3} = ?$$

$$\frac{24}{25} : 8 = ?$$

$$\frac{4a^5}{b} : a^3 = ?$$

$$\frac{5}{18} \text{ fl.} = ?$$

Man verkleinere den Bruch 57 kr. = $^{57}/_{60}$ fl.!

§. 26.

Addition.

1) Wenn die Brüche einerlei Nenner haben, so addiert man die Zähler, und schreibt den gleichen Nenner unter dieser letztern Summe; z. B.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}, \quad \frac{3}{4} + \frac{4}{4} = \frac{3+4}{4} = \frac{7}{4}.$$

2) Haben die Brüche verschiedene Nenner, so bringe man die Brüche unter einerlei Benennung und addiere die Zähler; z. B.

$$\frac{a}{4b} + \frac{c}{ab^2} + \frac{d}{2m} + \frac{5e}{8m^3} + \frac{5}{6} \text{ (§. 24)} =$$

$$\frac{6a^2bm^3 + 24cm^3 + 12ab^2dm^2 + 15ab^2e + 20ab^2m^3}{24ab^2m^3}.$$

Eben so addiere man die Brüche §. 25.

3) Gemischte Brüche werden vorerst eingerichtet (§. 23), und dann addiert; z. B. $2\frac{3}{4} + 5\frac{1}{3} =$

$$\begin{array}{r|l} & \frac{11}{4} + \frac{16}{3} = \frac{33+64}{12} = \frac{97}{12} = 8\frac{1}{12}. \\ 4 & 4 \quad\;\; 3 \\ 3 & 1 \quad\;\; 1 \end{array}$$

Oder man zähle die Summe der Brüche zur Summe der Ganzen.

§. 27.

Subtraction.

1) Haben zwei Brüche gleiche Nenner, so zieht man die

Zähler ab, und setzt den gleichen Nenner unten hin; z. B.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}.$$

2) Haben sie aber ungleiche Nenner, so macht man ihnen gleiche Nenner (§. 24), und verfährt wie sub nro. 1.

$$\begin{array}{c|l} & \frac{a}{c} - \frac{a}{d} = \frac{ad - ac}{cd} \\ c & c \quad\; d \\ d & 1 \quad\; 1 \end{array}$$

3) Gemischte Brüche werden vor der Subtraction eingerichtet; z. B. $5\frac{1}{4} - 3\frac{4}{5} = \frac{21}{4} - \frac{19}{5} = \frac{105-76}{20}$ $= \frac{29}{20} = 1\frac{9}{20}$.

Man kann hier auch durch Entlehnen abziehen; denn $5\frac{1}{4} = 4\frac{5}{4}$. Hievon $3\frac{4}{5}$ abgezogen, bleiben 3 von 4 $= 1$; $\frac{5}{4} - \frac{4}{5} = \frac{25-16}{20} = \frac{9}{20}$; also $1\frac{9}{20}$.

Zur Uebung! $\frac{a}{m} - \frac{b}{m}$; $\frac{a}{d} - \frac{m}{n}$; $\left(a + \frac{c}{m}\right) - \left(b + \frac{n}{m}\right) = \frac{ad+c}{d} - \frac{bm+n}{m} = \frac{adm + cm - bdm - dn}{dm}$ $= \frac{-dn + m(ad - bd + c)}{dm}$ (§. 12, in Factoren aufgelöset). Die wechselseitigen Proben!

§. 28.

Multiplication.

Man multipliciert die Zähler mit den Zählern, die Nenner mit den Nennern. Gemischte Brüche richtet man vorher ein; z. B.

$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; $\frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{20} \overset{4}{=} \frac{3}{5}$. Denn man soll den d^{ten} Theil von $\frac{a}{b}$ oder $\frac{a}{bd}$ (§. 25) $c$mal nehmen $= \frac{ac}{bd}$ (§. 25).

Zur Uebung! $\frac{abc^m}{d^n} \times \frac{a^2bc^p}{d^f}$! (§. 11).

§. 29.

Division.

Brüche werden dividiert, wenn man mit dem umgestürzten Divisor den Dividend nach dem vorigen §. multipliciert; z. B. $\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{a}{b} \times \frac{n}{m} = \frac{an}{bm}$; $\frac{3}{4} : \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$. Denn $\frac{m}{n} \times \frac{an}{bm} = \frac{amn}{bmn} \overset{mn}{=} \frac{a}{b}$ (§. 13; 2. Beisp.).

Zur Uebung! $\left(a + \frac{b}{c}\right) : \left(m + \frac{m}{n}\right) = \frac{ac + b}{c} : \frac{mn + m}{n}$ und nun weiter! Die wechselseitigen Proben!

Bruchsbrüche (gebrochene Brüche) sind solche Brüche, wo entweder der Zähler oder der Nenner ein Bruch ist, oder beide, Zähler und Nenner, Brüche sind; z. B.

$$\frac{a}{\frac{b}{m}}\ \text{(Nenner)}; \qquad \frac{\frac{c}{d}}{a}\ \text{(Zähler)}; \qquad \frac{\frac{a}{b}\ \text{(Zähler)}}{\frac{m}{n}\ \text{(Nenner)}}$$

Es ist der erste dieser Brüche $= a : \frac{b}{m} = \frac{a}{1}$ (§ 21) $\times \frac{m}{b} = \frac{am}{b}$. Der zweite aber ist $= \frac{c}{d} : a = \frac{c}{ad}$ (§. 25). Endlich der dritte $= \frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{a}{b} \times \frac{n}{m} = \frac{an}{bm}$.

Man darf nun auch sagen: Brüche werden dividiert, wenn man Zähler mit Zählern, Nenner mit Nennern dividiert; z. B. $\frac{4}{25} : \frac{2}{5} = \frac{4 : 2}{25 : 5} = \frac{2}{5}$; denn $\frac{4}{25} \times \frac{5}{2} = \frac{20}{50} \overset{10}{=} \frac{2}{5}$. Ferner: $\frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{3 : 5}{4 : 6} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{6}} =$

$\frac{3}{5} \times \frac{6}{4} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$. Denn $\frac{3}{4} \times \frac{6}{5} = \frac{18}{20} \overset{2}{\smile} = \frac{9}{10}$.

§. 30.

Decimalbrüche.

Ein Decimal- oder zehntheiliger Bruch (fractio decimalis) ist ein solcher, dessen Nenner 10 oder eine Potenz von 10, also 100, 1000, 10000, 100000 2c. ist; z. B. $\frac{7}{10}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{19}{1000000}$ 2c. Da der Nenner stets bekannt ist, so schreibt man denselben niemals an, sondern nur den Zähler dergestalt, daß man die Ganzen durch ein Komma (,) von dem Zähler trennt, und rechts nach dem Komma so viele Decimalstellen (Noten) folgen läßt, als der gedachte Nenner Nullen (nach 1) hat; z. B. $\frac{7}{10} = 0{,}7$, d. h. kein Ganzes und $\frac{7}{10}$; $5\frac{17}{1000} = 5{,}017$, d. i. fünf Ganze und $\frac{17}{1000}$; $\frac{29}{1000000} = 0{,}000029$; $25\frac{73}{100} = 25{,}73$; $\frac{278}{10000} = 0{,}0278$; $\frac{32127}{100000} = 0{,}32127$, d. h. 3 Zehntel, 2 Hundertel, 1 Tausendel, 2 Zehntausendel, 7 Hunderttausendel, oder 32127 Hunderttausendel. Man schreibe als Decimalbrüche 247 Milliontel; ferner: $9\frac{3}{1000}$; $8\frac{7}{10}$; $25\frac{27}{10000}$! *)

§. 31.

Man mag einem Decimalbruche rechts Nullen nach Belieben anhängen, und es wird dessen Werth nicht geändert. z. B. 0,5 = 0,50 = 0,500 = 0,5000 = 0,50000 = 0,500000 = 0,5000000 2c., oder $\frac{5}{10} = \frac{50}{100} = \frac{500}{1000} = \frac{5000}{10000} = \frac{50000}{100000}$ 2c. Aber wenn man links vor den Decimalnoten Nullen einsetzt, wird der Decimalbruch verringert, und zwar um das Zehnfache bei jeder

*) Man lies't auch 0,16 sechzehn einfache Decimalen; 0,016 sechzehn zehnfache Decimalen 2c.

eingeschalteten Null; z. B. $0{,}5 = \frac{5}{10}$; $0{,}05 = \frac{5}{100}$; $0{,}005 = \frac{5}{1000}$; $0{,}0005 = \frac{5}{10000}$; $0{,}00005 = \frac{5}{100000}$ ꝛc.

§. 32.

Mit 10, 100, 1000, 10000 ꝛc. wird ein Decimalbruch multipliciert, wenn man das Komma um so viele Noten von links nach rechts setzt, als Nullen dieser Factor zählt; z. B. $0{,}2789 \times 100 = 27{,}89$; denn $\frac{2789}{10000} \times 100 = \frac{278900}{10000} = 27\frac{8900}{10000} = 27\frac{89}{100} = 27{,}89$. So wird $0{,}12468 \times 10000 = 1246{,}8$.

Mit 10, 100, 1000, 10000 ꝛc. wird ein Decimalbruch dividiert, wenn man das Komma um soviele Stellen von rechts nach links schreibt, als der Divisor Nullen enthält; z. B. $278{,}9 : 100 = 2{,}789$; denn $278\frac{9}{10} \times \frac{1}{100} = \frac{2789}{10} \times \frac{1}{100} = \frac{2789}{1000} = 2\frac{789}{1000} = 2{,}789$.

§. 33.

Ein jedes Ganzes ist ein gleicher Decimalbruch, wenn man dem Ganzen hinter einem Komma beliebig viele Nullen anhängt; z. B. $12 = 12{,}00000 \ldots$; $24{,}8 = 24{,}8000 \ldots$

§. 34.

Jeden gemeinen Bruch verwandelt man dadurch in einen gleichen Decimalbruch, daß man mit dem Nenner in den Zähler theilt, dem Reste eine Null anfügt, und mit dem Nenner die Division fortsetzt; z. B. $\frac{4}{5} = 0{,}8$; man spreche: 5 in 4 geht 0 mal, und setze das Komma; dann: 5 in 40 geht 8 mal; ferner $\frac{7}{8} = 0{,}875$; nämlich:

: 8 | 7 | 0,875
  0 (Denn $0{,}8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$;)
Rest 7
  70
  : 8 ($0{,}875 = \frac{875}{1000} \overset{125}{=} \frac{7}{8}$.)
  64
   60
   : 8
   56
    40
    : 8
    40

Es kann der Fall eintreten, daß ein gemeiner Bruch

einem unendlichen Decimalbruche gleich wird, wenn nämlich die angezeigte Division nicht aufgeht; z. B.

$\frac{2}{7} = 0{,}285714\ 285714 \ldots\ldots\ldots$

20
60
40
50
10
30
20
ꝛc.

Der unendlichen Decimalbrüche gibt es folgende vier Arten: 1) Einige wiederholen die nämliche Note; z. B. 0,3333333 . . . .; um ihren Werth zu entdecken, darf man nur 9 als Nenner unter die erste gleiche Note schreiben; z. B. $0{,}333333 \ldots = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$; 2) andere wiederholen eine bestimmte Anzahl Ziffern (Perioden), z. B. 0,285714 285714 . . .; um ihren Werth zu finden, darf man nur soviel 9 unter die erste Periode (285714) schreiben, als Noten sie enthält; nämlich $\frac{\overset{142857}{\smile}\ 285714}{999999} = \frac{2}{7} = 0{,}285714$ 285714 . . . .; nach Eulers Methode ist

$$S = 0{,}285714 \quad 285714 \ldots\ldots$$
$$\underline{1000000S = 285714, \quad 285714 \ldots\ldots \quad (§.\ 32)}$$
$$1000000S - S = 999999S = 285714{,}000000 \ldots\ldots (§. 4; 4);$$

endlich $S = \frac{285714}{999999} = \frac{2}{7}$ (§. 4; 4); 3) andere wiederholen nach ungleichen Noten lauter gleiche; z. B. 0,16666 . . .; um dieser Brüche Werth zu bestimmen, setze man unter die ungleichen Noten den gehörigen Nenner, und unter die erste gleiche Note 9 mit sovielen Nullen, als viel ungleiche Noten vorausgehen, und addiere: $\frac{1}{10} + \frac{6}{90} = \frac{9+6}{90}$ $= \frac{15}{90} = \frac{1}{6} = 0{,}16666 \ldots\ldots$; aber nach Euler ist offenbar $0{,}16666 \ldots\ldots = 0{,}66666 \ldots\ldots - 0{,}5 = \frac{6}{9}$ $- \frac{5}{10} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6}$; 4) andere solche Brüche lassen auf gleiche Noten Perioden folgen; z. B. 0,331458 . . . . . .; um den Werth dieser Brüche zu bestimmen, setze man unter die gleichen oder ungleichen Noten den treffenden Nenner, und unter die erste Periode die

gehörige Anzahl 9 nebst sovielen angefügten Nullen, als gleiche oder ungleiche Noten vorangehen;

$\frac{33}{100} + \frac{1458}{999900} = \frac{1473}{4444} = 0{,}331458\ .....$

Welchen gemeinen Brüchen sind die Decimalbrüche gleich: 0,758; 0,66666....; 0,296296....; 0,416666....; 0,1458 3333...; 0,33111111......?

Es ist 0,758 offenbar $\frac{758}{1000} = \frac{379}{500}$; nach Euler wird offenbar 0,416666.... = 0,666666.... — 0,25 = $\frac{2}{3} - \frac{26}{100} = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$; nach Euler ist S = 0,296296...; 1000S = 296,296296 ...; 1000S — S = 999S = 296,000000... und $S = \frac{296}{999} \overset{37}{\smile}= \frac{8}{27}$.

Daß endlich 0,6666.... = $\frac{2}{3}$, zeigt Euler so:

$S = 0{,}66666\ ....;$

$10^n S = 66666{,}666....;$ ($n = 5$ = der Notenanzahl.)

$10^5 S - S = 66666{,}00000\ ... -$

$(10^5 - 1)S$ (§. 12, Auflös. in Fact.) $= (100000 - 1)S = 99999S = 66666$, und $S = \frac{66666}{99999} = \frac{2}{3}$.

§. 35.

Addition und Subtraction.

Man schreibt die Ganzen unter die Ganzen, die Komma unter die Komma, die Zehntel unter die Zehntel, die Hundertel unter die Hundertel, die Tausendel unter die Tausendel 2c. nach der Gleichartigkeit, und addiert und subtrahiert, wie bei ganzen Zahlen; z. B.

Addition.	Subtraction.
2,1234	29,1230056(0)
15,02098	0,9524198 7
17,3987	28,17058573 Rest.
0,7851	
35,32818 Summe.	

Denn wenn man diese Decimalbrüche als gemeine Brüche behandelt, und die letztern addiert und abzieht, so erhält man die vorige Summe und Differenz in gemeinen Brüchen. Dieß zur Uebung!

§. 36.

Multiplication.

Man schreibt die Decimalbrüche ohne Rücksicht auf das Komma, wie ganze Zahlen, die man multiplicieren sollte, unter einander; dann multipliciert man auch die Decimalbrüche

wie die Ganzen, und schneidet im Producte von rechts nach links so viele Noten durch das Komma ab, als in jedem Factor Decimalstellen stehen; z. B.

```
     0,31234569
    ×0,56789
   ------------
     281111121
    249876552
   218641983
  187407414
 156172845
---------------
0,17737709389 41.
```

Denn wenn man die Factoren als gemeine Brüche anschreibt und vervielfältiget, so erhält man in gemeinen Brüchen das Resultat der Decimalbrüche. Dieß zur Uebung!

Verkürzt multipliciert man solche Beispiele, wenn man mit 5 = 0,5 die ganze obere Zahl oder 0,3123456 2c. multipliciert, dann mit 6 = 0,06 die ganze obere Zahl außer 9; dann mit 7 alles Obere außer 69; dann alles Obere mit 8 außer 569 2c., und addiert; nämlich:

```
 0,312 34569
  ×0,56789
 ------------
 0,1561 72845
    187 40736
     21 86415
      2 49872
        28107
 ------------
 0,1773 77975.
```

Das Product fehlt nur um 2 Hundertmilliontel.

§. 37.

Division.

I. Wenn der Divisor und Dividend gleich viele Decimalnoten haben, so dividiert man wie bei ganzen Zahlen, und der Quotus enthält Ganze; z. B.

```
: 0,008 | 64,728 | 8091
        | 64     |
        ---------
           72
           72
          ---
            8
            8
          ---
            —
```

Denn: $64\frac{728}{1000} : \frac{8}{1000} = \frac{64728}{1000} \times \frac{1000}{8} = \frac{64728}{8}$ $= 8091$.

II. Wenn aber der Divisor mehr Decimalstellen hat, als der Dividend; so hängt man dem Dividend so viele Nullen rechts an, bis er soviele Noten zählt als der Divisor. Dann geschieht die Division wie sub nro. I.; z. B.

: 0,00008 | 0,24 |

: 0,00008 | 0,24000 | 3000.
| 24 |
—000

Denn: $\frac{24}{100} : \frac{8}{100000} = \frac{24}{100} \times \frac{100000}{8} = \frac{2400000}{800}$

$= 3000.$

III. Wenn endlich der Divisor weniger Noten zählt, als der Dividend; so dividiert man wie bei ganzen Zahlen, und schneidet im Quotus von rechts nach links durch das Komma so viele Ziffern ab, als der Dividend mehr Noten hat, denn der Divisor; z. B.

: 0,6 | 0,00048 | 8

: 0,6 | 0,00048 | 0,0008.

Nämlich: $\frac{48}{100000} : \frac{6}{10} = \frac{48}{100000} \times \frac{10}{6} = \frac{480}{600000}$

$= \frac{48}{60000} \overset{6}{=} \frac{8}{10000}.$

Die verkürzte Division wird so gemacht: Man dividiert mit dem ersten Theile des Divisors in den Dividend; mit dem erhaltenen ersten Quotustheile multipliciert man den ganzen Divisor und zieht ab; dann dividiert man wieder mit dem ersten Theile des Divisors in den Rest, und multipliciert mit dem zweiten Quotus den ganzen Divisor außer dessen niedrigste Ziffer, so daß man nach jedem Dividieren beim erfolgten Multiplicieren im Divisor rechts um eine Stelle weiter hineinrückt; z. B.

: 0,31234569 | 0,177377975 | 0,56789
| 156172845 |
21205130
18740736
2464394
2186415
277979
249872
28107
28107

Zum Addieren: $0{,}7899 + 6{,}085 + 6{,}976 + 67{,}009896.$
» Abziehen: $9{,}0007867 - 5{,}0123456709.$
» Multiplic.: $0{,}78901 \times 9{,}678 \times 27{,}001.$
» Dividieren: $\frac{0{,}456}{0{,}004};\ \frac{48{,}36}{0{,}003};\ \frac{206{,}7696}{59{,}76}.$

§. 38.

Kettenbrüche.

Die Kettenbrüche erhält man, da man mit dem Zähler eines gemeinen Bruches in den Zähler und Nenner desselben dividiert, den Rest wieder mit dem Zähler theilt, und so lange damit fortfährt, bis 1 der letzte Rest ist; z. B.

$$\frac{113}{355} = \frac{1}{3 + \frac{16}{113}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16}}}.$$

Also ist $\frac{113}{355} = \frac{1 = \text{Zähler}}{3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16}}}$.
Nenner

Dieser Kettenbruch diente dazu, um Näherungswerthe für den Bruch $\frac{113}{355}$ zu erhalten; nämlich: a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{3 + \frac{1}{7}} = \frac{7}{22}$ (§. 29); c) $\frac{1}{3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16}}} = \frac{113}{355}$;

denn $\frac{7 \times 16 + 1}{16}$ gestürzt $= \frac{16}{113}$; $\frac{3 \times 113 + 16}{113}$ gestürzt $= \frac{113}{355}$.

Sohin kann man $\frac{7}{22}$ statt $\frac{113}{355}$ beinahe setzen.

Oder: Sucht man das gemeine Maß zu 113 und 355; so hat man:

```
113|355|3
   |339|
   ----
    16|113|7
      |112|
      ----
         1|16|16
          |16|
          ---
```

Nun rechne man mit Vega so:

$\frac{0}{1}$, $\frac{1}{3}$ (erster Quotus als Nenner)

$$\frac{1 \times 7}{3 \times 7} = \frac{7 + 0}{21 + 1} = \frac{7}{22}$$

$$\frac{7 \times 16}{22 \times 16} = \frac{112 + 1}{352 + 3} = \frac{113}{355}.$$

Man habe zur Näherungsbestimmung den Bruch

$$\frac{351}{965} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{87}}}}}.$$

Näherungswerthe:

a) $\frac{1}{2}$; b) $\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}} = \frac{1}{3}$; c) $\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{3}{8}$;

d) $\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}}} = \frac{4}{11}$.

Oder auch:

$$\begin{array}{r|r|l}
351 & 965 & 2 \\
 & 702 & \\
\hline
263 & 351 & 1 \\
 & 263 & \\
\hline
88 & 263 & 2 \\
 & 176 & \\
\hline
87 & 88 & 1 \\
 & 87 & \\
\hline
1 & 87 & 87 \\
 & 87 & \\
\hline
 & — &
\end{array}$$

Nun: $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}$

$$\frac{1 \times 1}{2 \times 1} = \frac{1 + 0}{2 + 1} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2 + 1}{6 + 2} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{3 \times 1}{8 \times 1} = \frac{3 + 1}{8 + 3} = \frac{4}{11}$$

$$\frac{4 \times 87}{11 \times 87} = \frac{348 + 3}{957 + 8} = \frac{351}{965}.$$

Zur Uebung bestimme man die Näherungen der Brüche:
$\frac{251}{764}, \frac{185}{581}, \frac{323}{475}, \frac{1769}{5537}$.

§. 39.

Um den Näherungswerth eines Bruches schnell anzugeben, schneidet man öfter rechts oben und unten gleichviele Ziffern weg; man sucht auch manchmal den Bruch zu verkleinern, indem man den Zähler oder Nenner oder beide um ein Kleines verändert rc.; z. B.

$$\frac{17|69}{55|37} = \frac{17}{55} = \frac{18}{54} = \frac{1}{3} \text{ beinahe.}$$

Nicht minder wird der Bruch in einen Decimalbruch verwandelt, um ein Gesetz zur Verkleinerung zu entdecken; z. B. $\frac{351}{965} = 0{,}3637 = 0{,}3636 = \frac{36}{99}$ (§. 34, nro. 2). $\overset{9}{=} \frac{4}{11}$.

§. 40.

Sexagesimalbrüche.

Ein Sexagesimalbruch ist jener, dessen Nenner 60 oder eine Potenz von 60 ist; z. B. $\frac{7}{60}$; $\frac{7}{60^2} = \frac{7}{3600}$; $\frac{7}{60^3} = \frac{7}{216000}$ rc.

Diese Brüche sind nützlich bei der Kreis- und Zeitrechnung, weil 1 Stunde und auch 1 Grad 60 Minuten, 1 Min. 60 Secunden, 1 Sec. 60 Terzien, eine Terz 60 Quarten, 1 Quart 60 Quinten rc. hat.

Wie bei den Decimal-, so schreibt man auch bei den Sexagesimalbrüchen den Nenner, der immer bekannt ist,

nicht an, sondern nur die Zähler, und zwar so, wie folgt:

1 Schock oder 60 Stunden $= \frac{60^2}{60}$ Stunden $= 60^{+1}$ (§. 11) $= 1^{+1}$;

1 Stunde $= \frac{60}{60}$ Stunden $= 60^0$ Stunden $= 1^0$ (§. 11);

2 Minuten $= 2 \times \frac{1}{60}$ Stund $= 2 \times 60^{-1}$ (§. 11) $= 2^{-1}$;

3 Secunden $= 3 \times \frac{1}{60 \times 60}$ Std. $= 3 \times \frac{1}{60^2} = 3 \times 60^{-2} = 3^{-2}$;

4 Terzien $= 4 \times \frac{1}{60^3}$ Std. $= 4 \times 60^{-3} = 4^{-3}$.

Man schreibe an 9 Schock, 24 Stunden, 18 Minuten, 53 Secunden, 8 Terzien, 7 Quarten.

§. 41.

Gleichartig sind Sexagesimalbrüche, wenn sie gleiche Exponenten haben; z. B. 7^{-3}, 28^{-3}.

Einen Sexagesimalbruch verwandelt man in einen gleichen Sexagesimalbruch niedrigerer Sorten, wenn man denselben mit 60 ein- oder mehrmal multipliciert und die niedere Sorte jedesmal einzählt; und in einen Sexagesimalbruch höherer Sorten, wenn man denselben ein- oder mehrmal mit 60 dividiert. Dieses Verfahren heißt man **reducieren**, und 60 ist die **Reductionszahl**; z. B.

Wieviel Terzien geben $8^0\ 24^{-1}$?

$$\begin{array}{r}
8^0 \\
60 \\
\hline
480^{-1} \\
+24^{-1} \\
\hline
504^{-1} \\
60 \\
\hline
30240^{-2} \\
60 \\
\hline
1814400^{-3}
\end{array} = 8^0\ 24^{-1}.$$

Wie viele Stunden geben 1814400^{-3}?

$$\begin{array}{r|l|l|l|l}
60 & 1814400^{-3} & 30240^{-2} & 504^{-1} & 8^0 \\
 & 180 & :(60) & (60) & \\
 & \overline{144} & 300 & 480 & \\
 & 120 & & & \\
 & \overline{240} & \overline{240} & \overline{24^{-1}} & \\
 & 240 & 240 & & \\
 & \overline{=0^{-3}} & \overline{0^{-2}} & &
\end{array}$$

Wie viele Terzien sind 8 Schock (8^1), 24^0, 15^{-1} 3^{-2} 14^{-3}?
Wie viele Stunden sind 5443200^{-3}?
Wie viele Schock sind 32659200^{-3}?

§. 42.

Addition und Subtraction.

Man schreibe die gleichartigen Sexagesimalen unter einander, und addiere und subtrahiere dieselben, wie man benannte Zahlen (z. B. fl. und kr.) addiert und subtrahiert;

Addition.	Subtraction.
$46^0\ 28^{-1}\ 44^{-2}\ 4^{-3}$	$48^0\ 56^{-1}\ 8^{-2}\ 18^{-3}$
$18^0\ 12^{-1}\ 40^{-2}\ 24^{-3}$	$30^0\ 40^{-1}\ 18^{-2}\ 19^{-3}$
$16^0\ 4^{-1}\ 45^{-2}\ 18^{-3}$	Rest $= 18^0\ 15^{-1}\ 49^{-2}\ 59^{-3}$
Sum. $= 80^0\ 46^{-1}\ 9^{-2}\ 46^{-3}$	
$= 1^{+1}\ 20^0\ 46^{-1}\ 9^{-2}\ 46^{-3}$	

Man addiere: (1^1 20^0 46^{-1} 9^{-2} 46^{-3}) + (18^0 15^{-1} 49^{-2} 59^{-3}).

Eine Finsterniß begann Morgens 10 Uhr (10^0), 56^{-1} 48^{-2} 17^{-3} und endete Nachmittags 3 Uhr (15^0). Wie lange währte dieselbe?

Das Sonnenjahr hat 365 Tage 5^0 48^{-1} 44^{-2} und das Mondjahr zählt 354 Tage 8^0 48^{-1} 36^{-2}. Welches ist der Unterschied dieser Jahre?

§. 43.

Multiplication.

I. Soll man Sexagesimalen mit Ganzen oder Decimalen multiplicieren, so verfährt man ganz so, als wenn man benannte Zahlen (fl. und kr.) mit Ganzen oder Decimalen zu multiplicieren hätte; z. B.

$$8^0\quad 24^{-1}\quad 32^{-2}\quad 3^{-3}\ \times 9$$
$$75^0\quad 40^{-1}\quad 48^{-2}\quad 27^{-3}$$
$$= 1^{+1}\quad 15^0\quad 40^{-1}\quad 48^{-2}\quad 27^{-3}$$

Ferner:
$$4^0\quad 38^{-1}\quad 12^{-2}\quad 7^{-3}\ \times 4{,}5$$
$$20^0\quad 51^{-1}\quad 54^{-2}\quad 31{,}5^{-3}$$

38^{-1}
4,5
190
152
60 | $171{,}0^{-1}$ | 2^0
120
$51{,}0^{-1}$

4,5
12^{-2}
90
45
$54{,}0^{-2}$

Zur Uebung! Wenn von einem Mondesviertel zum andern (ein Viertel der Lunation) 7 Tage $9^0\ 11^{-1}\ 45^{-3}$ verfließen, wie groß ist dann eine ganze Lunation, und wie groß sind 12 Lunationen (Mondjahr)?

Der Schatten des Mondes weiset auf einer richtigen Sonnenuhr $11^0\ 45^{-1}$. Welches ist die eigentliche Nachtstunde? Ist das Alter des Mondes etwa $10\frac{1}{8}$ Tag (so viel ist seit dem Neumonde verflossen); so multipliciere man 49^{-1} (um wieviel nämlich der Mond täglich später aufgeht) mit $10\frac{1}{8}$; das Product addiere man zu der vom Mondesschatten gezeigten Stunde, und ziehe von der Summe 12^0 ab. Der Rest ist die verlangte wahre Stunde der Nacht.

II. Sind Sexagesimalen mit Sexagesimalen zu multiplicieren, so behandle man sie als Buchstabengrößen nach §. 11 nro. 2, und reduciere nach §. 41; z. B.

	12^0	5^{-1}	18^{-2}		
	4^0	6^{-1}	12^{-2}		
	48^0	20^{-1}	72^{-2}		
		72^{-1}	30^{-2}	108^{-3}	
			144^{-2}	60^{-3}	216^{-4}
	48^0	92^{-1}	246^{-2}	168^{-3}	216^{-4}
=	49^0	36^{-1}	8^{-2}	51^{-3}	36^{-4}

Man multipliciere: $5^0\ 56^{-1}\ 3^{-4}$ mit $2^{+1}\ 59^{-2}$

§. 44.

Division.

I. Soll man eine unbenannte Zahl mit einem Sexagesimalbruche theilen; so halte man die unbenannte Zahl für Stunden, und dividiere mit dem reducierten Sexagesimalbruche in diese Stunden, indem man den Exponenten des Divisors von jenem des Dividends abzieht, laut §. 11; z. B.

$$6{,}023 : 5^0\ 17^{-1} = 6{,}023^0 : 317^{-1};$$

$$\begin{array}{r|l|l} 317 & 6{,}023 & 0{,}019^{0-(-1)} = 0{,}019^{+1}\ (\S.\ 6). \\ & 317 & \\ \hline & 2\,853 & \\ & 2\,853 & \\ \hline & - - - - & \end{array}$$

Denn $6{,}023 = 6{,}023 \times \frac{60}{60} = 6{,}023 \times 60^0 = 6{,}023^0$ (§. 40).

II. Soll man Sexagesimalen mit Ganzen theilen, so verfährt man gerade so, als wenn man benannte Zahlen (fl., kr.) mit solchen zu theilen hätte; z. B.

$$
\begin{array}{l}
15 \,|\, 1^{\dagger 1} \quad 20^0 \quad 3^{-3} \,|\, 5^0 \; 20^{-1} \; 12^{-4} \\
\quad \times 60 \\
\quad\; 60^0 \qquad\qquad\qquad 3^{-3} \\
\quad +20^0 \qquad\qquad\quad 60 \\
:15 \,|\, 80^0 \,| \qquad\qquad 15 \,|\, 180^{-4} \,| \\
\qquad 75 \qquad\qquad\qquad\;\; 15 \\
\qquad\; 5^0 \qquad\qquad\qquad\;\; 30 \\
\qquad 60 \qquad\qquad\qquad\;\;\; 30 \\
15 \,|\, 300^{-1} \,| \qquad\qquad\;\; \text{--} \\
\qquad 300 \\
\qquad \text{---}
\end{array}
$$

III. Sind Sexagesimalbrüche mit Decimalbrüchen zu dividieren, so lasse man im Divisor das Komma weg, hänge dem Dividend gliedweise so viele Nullen an (§. 32), als der Divisor Decimalstellen zählt, und dividiere nach nro. II.; z. B.

$$: 4{,}5 \,|\, 20^0 \; 51^{-1} \; 54^{-2} \; 31{,}5^{-3} \,|$$

$$= : 45 \,|\, 200^0 \; 510^{-1} \; 540^{-2} \; 315^{-3} \,|$$

Das Uebrige zur Uebung! Es folgt noch ein ausgearbeitetes Beispiel über nro. I., wo gezeigt ward, wie man Sexagesimalen mit Sexagesimalen theilen soll.

$$
\begin{array}{l}
7^{\dagger 1} \; 8^0 \; 1^{-3} \,|\, 25^0 \quad 3^{-2} \,|\; 3^{-1} \; 37^{-2} \; 85^{-3} \\
\qquad\qquad\quad 21^0 \qquad\quad\;\; = 3^{-1} \; 38^{-2} \; 25^{-3} \text{ beinahe.} \\
\qquad\qquad\quad\; 4^0 \quad 24^{-1} \\
\qquad\qquad\quad 60 \\
\qquad\qquad\quad 240^{-1} \qquad 3^{-4} \\
\qquad\qquad + \; 24^{-1} \\
\qquad\qquad\quad 264^{-1} \qquad 5^{-1} \qquad + \; 3^{-2} \\
\qquad\qquad\quad 21 \qquad\quad \times 60 \qquad 296^{-2} \qquad 37^{-5} \\
\qquad\qquad\quad\; 54 \qquad\quad 599^{-2} \qquad 299^{-2} \\
\qquad\qquad\quad\; 49 \\
\qquad\qquad\quad\; \text{—}
\end{array}
$$

Wenn man $7^{\dagger 1} \; 8^0 \; 1^{-3}$ zu Terzien macht, erhält man:

$$
\begin{array}{r}
7 \\
60 \\
\hline
428 \\
60 \\
\hline
25680 \\
60 \\
\hline
1540800 \\
60 \\
\hline
92448001^{-3}
\end{array}
$$

Und wenn man $25^{0}\ 3^{-2}$ zu Terzien macht, hat man:

$$\begin{array}{r} 25 \\ 60 \\ \hline 1500 \\ 60 \\ \hline 90003^{-3} \\ 60 \\ \hline 5400180^{-3} \end{array}$$

Daher ist nun $\frac{54|00180^{-3}}{924|48001^{-3}}$ der Quotus.

Dieser Quotient ist $\frac{54}{924}$ (§. 39) gleich zu achten = $\frac{18}{308} = \frac{9}{154}$ Stund (nro. I.) = $3^{-1}\ 30^{-2}$ beinahe.

Fünfter Abschnitt.

Potenzieren und Depotenzieren.

§. 45.

Die Begriffe davon sieh §. 3. Statt $\sqrt{4}$ schreibt man auch $4^{\frac{1}{2}}$, statt $\sqrt[3]{8}$ sodann $8^{\frac{1}{3}}$; statt $\sqrt[n]{a^m}$ wird $a^{\frac{m}{n}}$. Solche Ausdrücke nennt man Potenzen mit gebrochenen Exponenten. Wenn man aus einer Größe die Wurzel nur näherungsweise anzugeben im Stande ist, so heißt man eine solche Größe eine Irrationalzahl, z. B. $\sqrt{3}$; denn 1×1 ist 1, und $2 \times 2 = 4$; $1{,}7 \times 1{,}7 = 2{,}89$ u. s. w. Gleichartige Wurzelgrößen sind solche, die gleiche Buchstaben und gleiche Exponenten haben; z. B. $2\sqrt[3]{b}$ und $7\sqrt[3]{b}$ oder $2b^{\frac{1}{3}}$ und $7b^{\frac{1}{3}}$. Gleichnamige Wurzelgrößen sind jene, welche den nämlichen Exponenten in der Wurzel haben; z. B. $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ oder $a^{\frac{1}{2}}$ und $b^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{z}$ und $\sqrt[3]{z^2}$ oder $z^{\frac{1}{3}}$ und $z^{\frac{2}{3}}$. Weil man ungleichnamige Wurzeln gleichnamig machen, z. B. $\sqrt[3]{a^5}$ und $\sqrt[4]{a^7}$; so verfahre man so: Man wirft die Exponenten der Wurzeln wechselweise aus einem in das andere Zeichen der Wurzel, und ergänzt den Exponenten der nach dem Wurzelzeichen stehenden Größen gehörig; nämlich: $\sqrt[3.4]{a^{5.4}}$,

$\sqrt[4.3]{a^{7\cdot3}} = \sqrt[12]{a^{20}}$, $\sqrt[12]{a^{21}} = \sqrt[3]{a^5}$, $\sqrt[4]{a^5}$; denn $a^{\frac{5}{3}}$ und $a^{\frac{7}{4}}$ ist ist offenbar $a^{\frac{20}{12}}$ und $a^{\frac{21}{12}}$.

Jede gerade Wurzel aus einer positiven Größe hat $\pm$ vor sich stehen; z. B. $\sqrt{4} = \pm 2$, weil $+2 \times +2$ und $-2 \times -2 = +4$ ist. Dagegen läßt sich aus einer negativen Größe keine Wurzel mit geradem Exponenten angeben; z. B. $\sqrt{-4}$ ist nicht ± 2, weil $\pm 2 \times \pm 2 = +4$ ist. Solche Ausdrücke $\sqrt{-4}$, $\sqrt[4]{-1}$ heißen unmöglich, eingebildet.

§. 46.

Addition und Subtraction.

Die Wurzelgrößen werden als Buchstabengrößen behandelt, d. h. die gleichartigen Wurzelgrößen addiert und subtrahiert man da- durch, daß man ihre Coefficienten addiert und subtrahiert (§. 7); z. B.

Addition.

$$\begin{array}{l} 5 + 3\sqrt{2} - 7\sqrt{3} - 12\sqrt[3]{16} + \sqrt{5} \\ 8 - 4\sqrt{2} + 9\sqrt{3} - 18\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{5} \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Summe} = 13 - \sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 30\sqrt[3]{16} + \sqrt{5} - \sqrt[3]{5}$$

Subtraction.

$$\begin{array}{l} -5\sqrt{a} + 21\sqrt[3]{b} - 21\sqrt[n]{c^2} + \sqrt[m]{e} - \sqrt[n]{e} + \sqrt{f} - 54 \\ -10\sqrt{a} + 24\sqrt[3]{b} - 22\sqrt[n]{c^2} - \sqrt[n]{e} + \sqrt{f} - 102 \\ + \quad - \quad + \quad + \quad - \quad + \\ \hline 5\sqrt{a} - 3\sqrt[3]{b} + \sqrt[n]{c^2} + \sqrt[m]{e} + 48. \end{array}$$

Die Probe zur Uebung!

§. 47.

Man kann öfter die Zahl nach der Wurzel in Factoren zerfällen, so daß aus einem Factor die Wurzel genau ausgezogen werden kann; z. B. man bezeichnet $\sqrt{96} = \sqrt{4 \cdot 24} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{24} = 2\sqrt{24}$; $\sqrt[3]{96} = \sqrt[8]{8 \cdot 12} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{12} = 2\sqrt[3]{12}$. Wenn ein Coefficient vor der Wurzel steht, so kann man denselben potenziert hinter die Wurzel setzen und multiplicieren; z. B. $3\sqrt{2} = \sqrt{23^2} = \sqrt{2 \cdot 9} = \sqrt{18}$; $4\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5 \cdot 4^3} = \sqrt[3]{5 \cdot 64} = \sqrt[8]{320}$.

Auf diese Weise sieht man ein, daß viele Wurzelgrößen nur scheinbar ungleichartig sind; z. B. $\sqrt[3]{24}$ und $\sqrt[3]{32}$ sind gleichartig; denn $\sqrt[3]{3 \cdot 8}$ und $\sqrt[3]{4 \cdot 8} = (\sqrt[3]{3})\sqrt[3]{8}$ und $(\sqrt[3]{4})\sqrt[3]{8} = (\sqrt[3]{3})2$ und $(\sqrt[3]{4})2 = 2\sqrt[3]{3}$ und $2\sqrt[3]{4}$. Die Summe also $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{32} = (\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4})\sqrt[3]{8} = (\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4}) \times 2 = 2(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4})$.

§. 48.

Multiplication und Division.

Gleichnamige Wurzelgrößen werden vor und nach dem Wurzelzeichen multipliciert und dividiert; ungleichnamige Wurzelgrößen werden gleichnamig gemacht (§. 45), und dann vor und nach dem Wurzelzeichen multipliciert und dividiert; z. B. $8\sqrt{4} \cdot 2\sqrt{9} = 16\sqrt{36} = 16 \cdot 6 = 96 = 8 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 16 \cdot 6 = 96$; $2\sqrt[3]{a} \cdot 3\sqrt[3]{b} = 6\sqrt[3]{ab}$; $25\sqrt{16} : 5\sqrt{4} = 5\sqrt{\tfrac{16}{4}} = 5\sqrt{4}$; $2\sqrt[3]{6} \cdot 4\sqrt[5]{9} = 2\sqrt[15]{6^5} \times 4\sqrt[15]{9^3} = 8\sqrt[15]{6^5 \cdot 9^3}$; $24\sqrt{12} : 3\sqrt[n]{4} = 24\sqrt[2n]{12^n} : 3\sqrt[2n]{4^2} = 8\sqrt[2n]{\frac{12^n}{4^2}}$. Man multipliciere: $5\sqrt[8]{4} \cdot 9\sqrt[8]{5}$; $5\sqrt[n]{6^2} \times 6\sqrt[m]{6}$. Man dividiere: $9\sqrt{4} : 3\sqrt{5}$; $14\sqrt[3]{8} : 2\sqrt{6}$; $5\sqrt[4]{8} : -\sqrt[5]{5}$!

§. 49.

Zusammengesetzte Wurzelgrößen werden nach §. 12 und §. 48 multipliciert; z. B.

$$
\begin{array}{r}
25\sqrt{4} + 30\sqrt[3]{6} + 2 \\
4\sqrt{5} + 5\sqrt[5]{9} \\
\hline
100\sqrt{20} + 120\sqrt[6]{5^3 \cdot 6^2} + 8\sqrt{5} \\
+ 125\sqrt[10]{4^5 \cdot 9^2} + 150\sqrt[15]{6^5 \cdot 9^3} + 10\sqrt[5]{9} \\
\hline
100\sqrt{20} + 120\sqrt[6]{5^3 \cdot 6^2} + 8\sqrt{5} + 125\sqrt[10]{4^5 \cdot 9^2} + 150\sqrt[15]{6^5 \cdot 9^3} + 10\sqrt[5]{9}
\end{array}
$$

Man multipliciere: $(8 + \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{3})(\sqrt{5} - \sqrt[3]{9})$.

§. 50.

Um complexe Wurzelgrößen zu dividieren, schreibe man dieselben bruchartig an. Dann multipliciere man den

Zähler und Nenner mit einer Größe, welche zum Nenner oder Divisor sich wie Summe und Unterschied (Differenz) verhält; z. B.

$$:8-\sqrt{45}\,|\,48-\sqrt{1280}-\sqrt{1620}+30\,|$$

$$=\frac{48-\sqrt{1280}-\sqrt{1620}+30}{:8-\sqrt{45}}.$$

Diesen Bruch multipliciere man nun im Zähler und Nenner mit $8+\sqrt{45}$. Man erhält:

$$\begin{array}{r} 48-\sqrt{1280}-\sqrt{1620}+30 \\ 8+\sqrt{45} \\ \hline 384-8\sqrt{1280}-8\sqrt{1620}+240 \\ 48\sqrt{45}-\sqrt{57600}-\sqrt{72900}+30\sqrt{45} \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Zähl.}=624+78\sqrt{45}-8\sqrt{1280}-8\sqrt{1620}-\sqrt{57600}-\sqrt{72900}$$

$$\begin{array}{r} 8-\sqrt{45} \\ 8+\sqrt{45} \\ \hline 64-8\sqrt{45} \\ +8\sqrt{45}-45 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Nenner}=64-45=19.$$

Der Zähler kann nach §. 47 verändert werden; denn $\sqrt{1280}=8\sqrt{20}$, und $\sqrt{1620}=9\sqrt{20}$; mithin ist er $=624+78\sqrt{45}-64\sqrt{20}-72\sqrt{20}-\sqrt{57600}-\sqrt{72900}=624+78\sqrt{45}-136\sqrt{20}-240-270$, weil auch $\sqrt{57600}=\sqrt{240\cdot240}$ (§. 47), und $\sqrt{72900}=\sqrt{270\cdot270}$. Somit ist der Zähler $=114+234\sqrt{5}-136\sqrt{20}$, da $\sqrt{45}=\sqrt{5\cdot9}$; endlich weil $234\sqrt{5}=117\sqrt{5\cdot4}$, nämlich $2\times117\sqrt{5}$ (§. 47); so ist der Zähler $=114-19\sqrt{20}$; also ist $\dfrac{114-19\sqrt{20}}{(\text{Nenner})\ 19}=6-\sqrt{20}$ der Quotus.

Dieses Beispiel hätte kürzer so gemacht werden können:

$$\begin{array}{rl|l} :8-\sqrt{45} & 48-\sqrt{1280}-\sqrt{1620}+30 & 6-\sqrt{20} \\ & 48-6\sqrt{45} & \\ & =48-\sqrt{45\cdot36} & \\ & =48-\sqrt{1620} & \\ & -\quad+ & \\ \hline & -\sqrt{1280}+30 & \\ :8=:\sqrt{64} & -\sqrt{1280}+\sqrt{45\cdot20} & \\ & =-\sqrt{1280}+\sqrt{900} & \\ & =-\sqrt{1280}+30 & \\ & +\quad- & \\ \hline & \text{—}\quad\text{—} & \end{array}$$

Man dividiere: $\dfrac{63+\sqrt{3240}-\sqrt{1568}-\sqrt{1280}}{9-\sqrt{32}}$.

§. 51.

Ein Binomium ist eine Summe oder Differenz zweier Größen; z. B. $(a + b)$ oder $(a - b)$ ist zweitheilig; dann folgen die Trinomien, Quadrinomien; z. B. $(a + b + c)$ ist drei-, und $(a - b + c - d)$ viertheilig rc. Sieh §. 8, 4tes Beispiel.

Das Quadrat einer zweitheiligen Größe besteht aus dem Quadrate des ersten Theiles, aus dem doppelten Producte der Theile und aus dem Quadrate des zweiten Theiles; z. B. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$; denn:

$$\begin{array}{rrr} a & + & b \\ a & + & b \\ \hline a^2 & + & ab \\ & & ab + b^2 \\ \hline a^2 & + & 2ab + b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} a & - & b \\ a & - & b \\ \hline a^2 & - & ab \\ & - & ab + b^2 \\ \hline a^2 & - & 2ab + b^2. \end{array}$$

Also ist das Quadrat von $27 = (20 + 7)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 7 + 7^2 = 400 + 280 + 49 = 729$, oder $= (30 - 3)^2 = 30^2 - 2 \cdot 30 \cdot 3 + 3^2 = 900 - 180 + 9 = 909 - 180 = 729$.

Das Quadrat eines Trinomiums oder von $(a + b + c)$ $= \Big(\underset{\text{I.}}{(a + b)} + \underset{\text{II.}}{c}\Big)^2 = (a^2 + 2ab + b^2) + 2(a + b)c + c^2$.

§. 52.

Um aus einem Buchstabenquadrate die Quadratwurzel auszuziehen, verfahre man so: Man ziehe die Quadratwurzel aus dem ersten Gliede aus, indem man mit dem Wurzelzeichenexponenten in den Exponenten dieses Theiles dividiert (§. 45). Den erhaltenen ersten Theil der Wurzel quadriere man, und ziehe ihn sodann vom gegebenen Quadrate ab; diesen nämlichen ersten Theil verdopple man, und dividiere damit in ein entsprechendes Glied des Quadrates, wodurch man den zweiten Theil der Wurzel erhält, mit welchem man dann den Divisor multipliciert; den zweiten Wurzeltheil quadriert man auch. Die letzten zwei Producte zieht man vom Quadrat wieder ab. Bleibt noch ein Rest, so nehme man die bisherigen Wurzeltheile (als einen Theil betrachtet) doppelt, dividiere damit in den Rest, multipliciere, quadriere und ziehe ab, nach der Versregel: Dupla, diquevidas, post duc et subtrahe tandem; z. B.

$$\sqrt{(a^2+4ag+4g^2+6ae+12eg+9e^2)} = \overset{a}{\smile}a + \overset{b}{\smile}2g + \overset{c}{\smile}3e = \square \text{ Wurz.}$$

$a^2 = a^2$

—

$2a = (2a)$ | $2(a+b) = 2(a+2g)$
$2ab = 4ag$ | $. = (2a+4g)$
— | $2(a+b)c = (2a+4g) \cdot 3e$
$b^2 = 4g^2$ | $= \pm 6ae \pm 12eg$
— | $c^2 = \pm 9e^2$

Probe.

$$\begin{array}{l} a + 2g + 3e \\ \times\, a + 2g + 3e \\ \hline a^2 + 2ag + 3ae \\ \quad + 2ag + 4g^2 + 6eg \\ \qquad + 3ae + 6eg + 9e^2 \\ \hline a^2 + 4ag + 4g^2 + 6ae + 12eg + 9e^2. \end{array}$$

Zur Uebung! $\sqrt{(a^4b^2+c^2d^2+g^2+2a^2bcd+2a^2bg+2cdg)}$!

§. 53.

Ein Quadrat, dessen drittes oder letztes Glied fehlt, wird dadurch ergänzt (compliert), daß man mit dem Exponenten des ersten Gliedes den Coefficienten des zweiten Gliedes dividiert, und den Quotus quadriert beisetzt; z. B. $x^2 + px + ?$

$\frac{p}{2}$; $\frac{p}{4}$ ist die Ergänzung des Quadrats, also vollständig $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2$.

Man compliere $x^2 \pm x$! (§. 3 am Ende).

§. 54.

Um aus mehrzifferigen Zahlen die Quadratwurzel zu ziehen, muß man zwei Dinge wissen: I. daß die Quadratzahl höchstens noch einmal soviele Ziffern hat, als die Quadratwurzel, oder mindestens noch einmal soviele, weniger 1; z. B. die Wurzel 59 hat zwei Ziffern, das Quadrat von 59 oder $59^2 = 3481$ hat 4 Ziffern; 12 hat 2 Ziffern; $12^2 = 144$ hat 3 Ziffern, i. e. 2mal zwei, weniger 1; der Beweis liegt in Folgendem: Offenbar ist

$10 > 9$	$10 > 9$
$10^2 > 9^2$	$100 > 81$
$10^3 > 9^3$	$1000 > 729.$

Die Zahl 100 ist die kleinste aller Zahlen mit 3 Ziffern

und größer als 9^2 oder 81; folglich kann das Quadrat einer einzigen Ziffer (9) höchstens zwei Ziffern haben (81) wegen der Grenze (100); ferner ist klar, daß $10 < 40$, $10^2 < 40^2$ ꝛc. oder daß $100 < 1600$, und da 100 die kleinste dreizifferige Zahl und kleiner ist als 1600, so kann 40^2 nicht weniger als 3 Ziffern zählen; II. muß man wissen, wohin jeder Theil des Quadrates (§. 51) unter die Quadratzahl zu stehen komme.

Dieses erfährt man, wenn man $10^2 . a + 10 . b + 10^0 c$ quadriert, wo a, b, c beliebige Ziffern sind, und durch 10^2, 10, 10^0 die Stellen angedeutet werden nach Einern (§. 11), Zehnern, Hundertern;

$$
\begin{array}{llll}
 & 10^2.a + & 10.b + 10^0 c & \\
\times & 10^2.a + & 10.b + 10^0 c & \\
\hline
 & 10^4.a^2 + & 10^3.ab + 10^2.ac & \\
 & + & 10^3.ab + 10^2.b^2 + 10bc & \\
 & & + 10^2 ac + 10bc & + 10^0.c^2 \\
\hline
\end{array}
$$

$$10^4.a^2 + 2.10^3 ab + 10^2.b^2 + 2.10^2.ac + 2.10bc + 10^0 c^2$$
$$= 10^4.a^2 + 2.10^3 ab + 10^2.b^2 + 2(10^2.a + 10b)c + 10^0 c^2.$$

Zieht man nun hiernach die Quadratwurzel aus 119716, so hat man nach I. und II.

$$
\begin{array}{l|l}
a = 3 & \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 10^2.a + 10.b + 10^0.c \\
b = 4 & \qquad \sqrt{11|97|16} = 300 + 40 + 6 = 346 \;\square\; W. \\
c = 6 & 10^4.a^2 = 9|00|00 \\
 & \qquad \overline{\;2\;97\;16\;}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rr|rr}
(2\;.\;10^2\;.\;a = & 600) & 2(10^2.a + 10b) = & \overset{4116}{(680)} \\
2.10^2.a.10.b = 2.10^3.ab = & 24000 & 2(10^2.a + 10b)c = & 4080 \\
10^2\;.\;b^2 = & 1600 & 10^0 c^2 = & 36 \\
\hline
 & 25600 & & 4116 \\
\text{Rest} = & 4116 & & 0 = R.
\end{array}
$$

Jedoch in der Praxis oder Ausübung nimmt man die Regel §. 52; nämlich:

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{11 \mid 97 \mid 16} = \overset{\frown}{3\,4}\,6 \\
\;\underline{9} \\
\;\;2\;97 \\
\;\;\;(6)4 \\
\;\;\underline{2\;5\;6} \\
\;\;\;\;4\;1\;1\;6 \\
\;\;\;(6\;8)6 \\
\;\;\;\underline{4\;1\;1\;6} \\
\end{array}
$$

—

Man ziehe auf beide Arten die Quadratwurzel aus 6 | 65 | 64!

§. 55.

Geht die Ausziehung nicht auf, so hängt man dem Reste 00|00|... (als Klassen) an, und nach vorhergesetztem Komma in der Wurzel fährt man dann mit der Rechnung fort; z. B.

$\sqrt{3} = 1,7 \ldots\ldots$ (irrational).

```
 1
 ---
 200
  27
 189
 ----
  ꝛc.
```

§. 56.

Aus Decimalbrüchen wird die Quadratwurzel ausgezogen, wenn man die Ganzen besonders und die Decimalen besonders in Klassen theilt, und in der Wurzel nach der Klasse der Ganzen das Komma setzt; wenn die Noten der Decimalen keine gerade Anzahl Ziffern bilden, so hänge man ihnen eine Null rechts an; z. B.

$\sqrt{5|76,27|3}$

$= \sqrt{5|76,27|30} = 24,005 \ldots\ldots$

```
 4
 ----
 1 76
   44
 1 76
 ------
 - --  27
       48

       2730
        480

       273000
        4800
```

§. 57.

Aus einem gemeinen Bruche zieht man die Quadratwurzel aus, wenn man sie aus dessen Zähler und Nenner auszieht, oder wenn man dieselbe aus dessen gleichem Decimalbruche extrahiert; z. B.

$$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}; \text{ oder } \sqrt{\frac{1}{4}} = \sqrt{0,25} = 0,5.$$

§. 58.

Aus einem Sexagesimalbruche zieht man die Quadratwurzel aus, wie aus Ganzen; nur muß man denselben

vorher auf eine gerade niedere Benennung reducieren, und mit dem Wurzelzeichen-Exponenten (2) in die Potenz (—2, —4, —6 ıc.) des Sexagesimalbruches dividieren.

§. 59.

1. Beispiel.

Eine Anzahl Soldaten erbeutet 7744 fl. Sie theilen diese Summe dergestalt unter einander, daß jeder soviele Gulden bekommt, als ihrer sind. Man fragt um der Soldaten Anzahl. $\sqrt{77,44} = ?$ Soldaten.

2. Beispiel.

Ein Wall soll erstürmt werden, der zwar nur 63 Schuh hoch ist, jedoch über einem tiefen, 16 Schuh breiten Wassergraben liegt. Wie lang müßen die Sturmleitern sein? $\sqrt{63^2 + 16^2} = ?$ Schuh, die Sturmleiter.

Will man aus der Sturmleiter und Höhe des Grabens Breite wissen, so setze man den Unterschied der Quadrate der Längen der Sturmleiter und Höhe des Walles, und ziehe die □ Wurzel daraus; eben so, wenn man aus der Breite und Sturmleiter die Höhe wissen will, wo man aus der Differenz der Quadrate der Breite und Sturmleiter die □ Wurzel auszieht.

3. Beispiel.

Angenommen, daß der Perpendikel einer Uhr, der 36 Pariserzoll 8 Linien und 6 Scrupel mißt, in 1 Stunde 3600 Schwingungen (Vibrationen) mache; wieviele Schwingungen macht in 1 Stunde ein 10368 Pariserlinien langes Uhrpendel? Man mache die 36 Zoll 8 Linien 6 Scrupel zu Linien;

$$\begin{array}{r} 36 \\ 12 \\ \hline 72 \\ 36 \\ \hline 432 \\ 8\frac{1}{2} \\ \hline 440\frac{1}{2} \end{array}$$ Linie; 6 Scrupel = ½ Linie;

mit dieser Zahl dividiere man in die beständige Dividende 5708880000, und ziehe aus dem Quotus die □ Wurzel aus; $\frac{881}{2}$; $\frac{2}{881}$;

```
     5708880000
              2
881 | 11417760000 | √12|96|00|00 = 3600 Vibrationen.
      881·······     9
      2607           3 96
      1762             66
       8457           396
       7929
        5286
        5286
        ----
              7620
              7048
               5720
               5286
                4340
                3524
                 8160
                 7929
                   --
```

Also im zweiten Falle $\sqrt{\frac{5708880000}{10368}} = 742$ Vibrationen, d. h. 371 Streiche hin, und 371 Streiche her.

4. Beispiel.

In einem Garten, der ein Quadrat bildet, können 100 Bäume sein, wenn die Quadratseite 120 Schuh lang ist. Wie lang wird die Quadratseite werden, wenn 200 Bäume darin stehen sollen?

Man quadriere 120; $120^2 = 14400$; dieses Quadrat verdoppelt gibt 28800, und $\sqrt{2|88|00} = ?$ Schuh der Quadratseite des Gartens für 200 Bäume.

5. Beispiel.

Ein General will seine 15376 Mann in quadratische Schlachtordnung (quarré) stellen. Wie viele Mann kommen auf eine Reihe oder Front? $\sqrt{1|53|76} = ?$ Mann.

§. 60.

Der Cubus einer zweitheiligen Größe besteht aus dem Cubus des ersten Theiles, aus dem dreifachen Quadrate des ersten Theiles in den zweiten, aus dem dreifachen Quadrate des zweiten Theiles in den ersten, und aus dem Cubus des zweiten Theiles; z. B.

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$; denn:

$a^2 + 2ab + b^2$ (§. 51)	$a^2 - 2ab + b^2$
$a + b$	$a - b$
$a^3 + 2a^2b + ab^2$	$a^3 - 2a^2b + ab^2$
$a^2b + 2ab^2 + b^3$	$- a^2b + 2ab^2 - b^3$
$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Wenn $a = 6$ und $b = 3$; so wird $(6 + 3)^3 = 6^3 + 3 . 6^2 . 3 + 3 . 6 . 3^2 + 3^3 = 216 + 324 + 162 + 27 = 729 = 9^3$.

Der Cubus von $(a + b + c)$ oder $\left(\underset{\text{I.}}{(a + b)} + \underset{\text{II.}}{c}\right)^3$ $(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) + (3a^2c + 6abc + 3b^2c) + (3ac^2 + 3bc^2) + c^3$ oder, in Factoren aufgelöset $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a^2 + 2ab + b^2)c + 3(a+b)c^2 + c^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3$.

§. 61.

Ein unvollständiger Cubus, dessen letztes Glied fehlt, wird dadurch ergänzt, daß man den Coefficienten des zweiten Gliedes mit dem Exponenten des ersten dividiert, und den Quotus cubiert anfügt; z. B. $x^3 - 3x^2 + 3x$ soll ergänzt werden; $\frac{-3}{3} = -1$; $(-1)^3 = -1$ ist das Complement; also vollständig $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$; aber wenn die letzten zwei Glieder mangeln, so verfährt man so: man dividiere den Coefficienten des zweiten Gliedes mit dem Exponenten des ersten; der cubierte Quotus liefert den vierten Theil, und der mit dem Quotus multiplicierte Coefficient des zweiten Gliedes gibt den dritten Theil; nämlich: man ergänze $x^3 - 3x^2$; $\frac{-3}{3} = -1$; $(-1)^3 = -1$ vierter Theil; $-1 \times -3 = 3$; $3x$ dritter Theil; also vollständig $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$. Man ergänze nun $x^3 + \frac{1}{2}x^2$!

$\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{6}$; $(\frac{1}{6})^3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$ ist der vierte Theil; $\frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}x$ dritter Theil; also vollständig $x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x + \frac{1}{216}$.

Zur Uebung ergänze man die Cuben: $x^3 + 9x^2 + 27x$; $x^3 - 12x^2$!

§. 62.

Aus §. 60 ergibt sich folgender Massen die Ausziehung der Cubikwurzel aus Buchstaben: Man ziehe die Cubikwurzel aus dem ersten Theile aus (§. 52); den erhaltenen ersten Wurzeltheil cubiere man, und ziehe ihn ab. Nun quadriere man diesen Wurzeltheil, multipliciere ihn mit 3, und dividiere mit diesem Producte in ein passendes Glied der Cubikzahl, um den zweiten Wurzeltheil zu bekommen. Mit diesem zweiten Wurzeltheile multipliciere man den Divisor oder das vorige Triplat, und ziehe ab; dann nehme man das dreifache Quadrat des zweiten Theiles in den ersten der Wurzel, und den Cubus des zweiten Theiles, und ziehe diese Werthe von der Cubikzahl ab. Wenn noch ein Rest bleibt, so nehme man die bisherigen zwei Wurzeltheile als einen, quadriere sie, tripliere und dividiere, um den dritten Wurzeltheil zu erhalten. Dann multipliciert man den neuen Divisor mit demselben dritten Wurzeltheile und verfährt, wie vom Anfange her; z. B.

$$\sqrt[3]{(8x^6+12x^5-30x^4-35x^3+45x^2+27x-27)} = \underbrace{2x^2}_{a}+\underbrace{x}_{b}-\underbrace{3}_{c}$$

$a^3 = 8x^6$
—
——
--
$3a^2 = 3(2x^2)^2 = 3(2x^2 \cdot 2x^2)$
$= (12x^4)$
$3a^2b = 12x^4 \cdot x = 12x^5$
—
$3ab^2 = 6x^2 \cdot x^2 = -6x^4$
$b^3 = x^3$
—

Rest $= -36x^4 - 36x^3$
$3(a+b)^2 = (12x^4+12x^3+3x^2)$
$3(a+b)^2c = -36x^4 - 36x^3 - 9x^2$
+ + +

Rest $= 54x^2 + 27x - 27$
$3(a+b)c^2 = +54x^2 + 27x$
— —
$c^3 = -27$
+

Probe zur Uebung!

Man ziehe aus: $\sqrt[3]{(8a^3 - 60a^2b + 150ab^2 - 125b^3)}$!

§. 63.

Jede Wurzel in Ziffern gibt cubiert eine Kubikzahl, die 3mal so viele Ziffern hält, als die Wurzel, höchstens, oder 3mal so viele, weniger 2, mindestens; z. B.

Wurzel	Cubus
5	125 (3mal)
12	1728 (3mal — 2)

Also 1|728 zwei Klassen. Vergleiche §. 54.

Man zieht aus Zahlen z. B. 201230056 die Kubikwurzel laut §. 62 nach dem Schema (§. 60) aus, wie folgt:

$$\sqrt[3]{201|230|056} = \overset{a}{500} + \overset{b}{80} + \overset{c}{6} = 586.$$

$$\begin{array}{rrrr}
a^3 = & 125 & 000 & 000 \\ \hline
 & 76 & 230 & 056 \\
3a^2 = & (750, & 000); & \\
3a^2b = & 60 & 000 & 000 \\
3ab^2 = & 9 & 600 & 000 \\
b^3 = & & 512 & 000 \\ \hline
 & 70 & 112 & 000 \\ \hline
\text{Rest} = & 6 & 118 & 056
\end{array}$$

(7 in 762 geht 80mal, oder 7 in 76 geht 8mal.)

$$\begin{array}{rr}
3(a+b)^2 = & (1009200) \\
3(a+b)^2c = & 6055200 \\
3(a+b)c^2 = & 62640 \\
c^3 = & 216 \\ \hline
 & 6118056 \\ \hline
\text{Rest} = & 0.
\end{array}$$

In der Ausübung steht die nämliche Rechnung kurz so:

$$\sqrt[3]{201|230|056} = \overset{a}{5}\,\overset{b}{8}\,\overset{c}{6}$$

$$\begin{array}{rl}
a^3 = & 125 \\ \hline
 & 76\ 230 \\
3a^2 = & (7\ 5) \\
3a^2b = & 6\ 0\ 0 \\
3ab^2 = & 9\ 60 \\
b^3 = & 512 \\ \hline
 & 7\ 0\ 112 \\ \hline
 & 6\ 118\ 056 \\
3(a+b)^2 = & (1\ 009\ 2) \\
3(a+b)^2c = & 6\ 0552 \\
3(a+b)c^2 = & 6264 \\
c^3 = & 21\ 6 \\ \hline
 & 6\ 11805\ 6 \\ \hline
\end{array}$$

Man ziehe nach beiden Weisen aus $\sqrt[3]{761048497}$!

Kennt man die Schema der höhern Potenzen, z. B. der vierten, die man sich durch fortgesetzte Multiplication von $a + b$ mit $a + b$ ꝛc. leicht verschaffen kann; so kann man auch Biquadrat- ꝛc. Wurzeln darnach ausziehen; z. B.

$$\sqrt[4]{36|6218|6256|} = \overset{abc}{246} \qquad \left(\begin{matrix} a + b = A, \\ \text{und } c = B \end{matrix}\right)$$

$$\begin{array}{rl}
a^4 = & 16 \\ \hline
& 20\ 6218 \\
4a^3 = & (3\ 2) \\
4a^3b = & 12\ 8 \\
6a^2b^2 = & 3\ 84 \\
4ab^3 = & 512 \\
b^4 = & 256 \\ \hline
& 17\ 1776 \\ \hline
& 3\ 4442\ 6256 \\
4A^3 = & (5\ 5296) \\
4A^3B = & 33\ 1776 \\
6A^2B^2 = & 1\ 24416 \\
4AB^3 = & 20736 \\
B^4 = & 1296 \\ \hline
& 34\ 4426256 \\ \hline
\text{Rest} = & 0.
\end{array}$$

Zur Uebung suche $\sqrt[4]{33|1776}$!

§. 64.

Geht die Ausziehung nicht auf, so setzt man nach der Cubikwurzel das Komma und fährt, nachdem man dem Reste 000|000|000|.... angehängt hat, mit der Rechnung weiter;

$\sqrt[3]{3} = 1,4 \ldots\ldots$ (irrational).

1
2 000
(3)
12
48
64
1 744
256000.

§. 65.

Aus einem Decimalbruche wird die Cubikwurzel ausgezogen, wie aus Ganzen; nur theilt man die Ganzen besonders und die Noten besonders in Klassen ein. Nach ausgezogener Wurzel der Ganzen folgt das Komma. Wenn die Notenanzahl der Decimalen nicht 3, 6, 9, 12 . . . ist; so hänge man ihnen rechts 00 oder 0 an bis zu ihrer gehörigen Anzahl; z. B.

$$\sqrt[3]{1,|728} = 1,2.$$

```
√1,|728 = 1,2.
  -|728
 (3)
  6
  12
   8
  728
   -
```

§. 66.

Aus einem gemeinen Bruche zieht man die Kubikwurzel aus, wenn man dieselbe aus Zähler und Nenner auszieht, oder aus dem ihm gleichen Decimalbruche nach §. 65 die Cubikwurzel sucht; z. B.

$$\sqrt[3]{\frac{729}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{729}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{9}{10}.$$

Aus Sexagesimalen zieht man die Kubikwurzel wie aus Ganzen aus; nur muß man alles auf die Exponenten (— 3, — 6, — 9 . . . .) reducieren, in die man dann mit dem Wurzelzeichen-Exponenten dividiert.

§. 67.

1. Beispiel.

Es wurden 28 fl. 48 kr. oder 13824 Häller unter einige Personen vertheilt. Jede Person bekam so viele Geldstücke, als es Personen waren, und jedes Geldstück war so viele Häller werth, als viele Geldstücke eine Person bekam. Wieviel waren es Personen, was hielt ein Geldstück, und wieviele bekam jede Person?

$$\sqrt[3]{13|824} = ?$$ Personen ꝛc.

2. Beispiel.

Setzen wir den Kubikschuh Regenwasser zu 62 ℔. Schwere, und das Verhältniß des Regenwassers zum Eisen der eigenen Schwere nach wie 1 : 7,645; so hat ein Kubikschuh Eisen 7,645 × 62 = 475,2320 ℔. Dividiert man nundie Zahl 2985984 oder die Duodecimal-Kubiklinien eines Kubukschuhes mit 475,2320; so erhält man den Quotus 6283,213 oder die Kubiklinien eines Pfundes Eisen in würfeliger Gestalt. Endlich wenn man aus 6283,213 die Kubikwurzel auszieht;

gibt diese Wurzel die Länge eines eisernen Würfels in Linien an, der gerade 1 ℔. wiegt. Wie groß ist nun die Länge desselben?

$$\sqrt[3]{6|283,|213} = ?$$

Sechster Abschnitt.

Algebra.

§. 68.

Den Begriff »Algebra« sieh §. 1.

Eine Gleichung (aequatio) ist der doppelte Ausdruck der nämlichen Größe; z. B. $a + x = 2x - b$; $2 + 5 = 1 + 6$.

Eine Seite (membrum) der Gleichung ist der Inbegriff aller Größen diesseits oder jenseits des Gleichheitszeichens (=); z. B. $a + x$; $2x - b$; $2 + 5$; $1 + 6$ sind Seiten der Gleichung.

Glied (terminus) der Gleichung ist jede einzelne Größe einer Gleichung; z. B. a; — b; 5; 2 ꝛc.

Die Gleichungen theilt man nach den unbekannten Größen (x, y, z, v, u, w ꝛc.) ein in niedere und höhere, je nachdem die unbekannte Größe als höchste Potenz in erster oder in 2, 3, 4, ... ^{ter} Würde steht; ferner: in Gleichungen mit einer und mehrern unbekannten Größen.

Eine Gleichung bilden, ansetzen heißt eine Aufgabe (Problem) aus der Wortsprache in die algebraische Zeichensprache richtig übersetzen. Hiefür gibt es keine allgemeine Norm, aber wohl für die Auflösung (solutio) der recht gebildeten Gleichung.

§. 69.

Jede Gleichung mit einer unbekannten Größe x wird aufgelöset: 1) durch Multiplication; dann folgt 2) die Transposition; den Schluß macht 3) die Division.

Die ganze Gleichung muß multipliciert werden, wenn ein Nenner in ihr vorhanden ist, und zwar mit dem größten Nenner in der Gleichung; z. B.

$$\frac{x}{3} + x = 16;$$
$$\times\ 3 = 3.$$
$$\times$$

$$\frac{3x}{3} + 3x = 48 \qquad (\S.\ 4;\ \text{nro.}\ 4)$$
$$x + 3x = 48;$$

kürzer:

$$\frac{x}{3} + x = 16;$$
$$x + 3x = 48.$$

Transponieren heißt eine Größe aus einer Seite der Gleichung wegnehmen und mit gegentheiligem Zeichen auf die andere Seite der Gleichung bringen; nämlich man bringt alle »x Größen« auf eine, und alle »nicht x Größen« auf die andere Seite der Gleichung; z. B.

$$a + x = 2x - b;$$
$$a + b = 2x - x$$
$$a + b = x;$$

denn:

$$a + x = 2x - b$$
$$b = b \qquad (\S.\ 4;\ \text{nro.}\ 4)$$
$$+ \quad +$$

$$a + b + x = 2x$$
$$x = x$$
$$- \quad -$$

$$a + b = x.$$

Die ganze Gleichung wird dividiert, wenn vor x ein Coefficient steht; mit diesem Coefficienten dividiert man die Gleichung; z. B. $x + 3x = 48$

$$4x = 48$$
$$x = \frac{48}{4}$$
$$x = 12;$$

denn:

$$4x = 48$$
$$4 = 4$$
$$: \quad :4 \qquad (\S.\ 4,\ \text{nro.}\ 4)$$

$$\frac{4x}{4} = \frac{48}{4}$$
$$x = 12.$$

§. 70.

An folgendem Beispiele werden diese Regeln alle sichtbar: Welche Zahl hat die Eigenschaft, daß ihre Hälfte,

ihr Drittel und Viertel zusammen um 1 mehr ausmachen, als sie selbst beträgt? Diese Zahl heisse x; dann ist $\frac{1}{2}x$ die Hälfte, $\frac{1}{3}x$ das Drittel und $\frac{1}{4}x$ das Viertel derselben, welche zusammen sie selbst (x) und 1 geben; mithin der Ansatz:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = x + 1.$$

Auflösung.

$$\times 4) \quad \frac{4x}{2} + \frac{4x}{3} + x = 4x + 4$$

$$= 2x + \frac{4x}{3} + x = 4x + 4;$$

$$\times 3) \quad 6x + 4x + 3x = 12x + 12$$

$$13x = 12x + 12;$$

transponiert) $13x - 12x = 12$

$$1x = 12$$

dividiert) $x = \frac{12}{:1} = 12$ ist die verlangte Zahl.

Probe.

$$\frac{12}{2} + \frac{12}{3} + \frac{12}{4} = 12 + 1$$

$$6 + 4 + 3 = 13.$$

Ehe die (durch Franciscus Vieta 1590 erfundene) Algebra bekannt war, half man sich sehr sinnreich durch die Rechnung mit Satz (Annahme) und Fehler. Im vorigen Beispiele, wornach eine große Menge bearbeitet werden kann, nehme man eine Zahl an, die durch alle Nenner (2, 3, 4) theilbar ist; also 24 sei die geforderte Zahl; ihre Hälfte ist 12, ihr 3tel = 8, ihr Viertel = 6; 12 + 8 + 6 = 26. Da 26 um 2 über 24 ist; so fehlt es um (1 — 2) = — 1. Nun sei 36 die gesuchte Zahl; ihre Hälfte = 18, ihr Drittel = 12, ihr Viertel = 9; 18 + 12 + 9 = 39. Weil 39 um 3 über 36 ist, so fehlt es um (1 — 3) = — 2; mithin:

Satz	Fehler
24	— 1
36	— 2
	+
	— 1 = Rest;

24 × — 2 = — 48
36 × — 1 = — 36
+
— 12 = Rest;

: — 1 | — 12 | + 12 ist die geforderte Zahl.

§. 71.

1. Beispiel.

Ein Sohn fragt um sein Alter. Der Vater antwortete ihm: Wenn du noch so alt, halb so alt, ein Viertel so alt und noch 1 Jahr älter wärest, als du dermal bist, so zähltest du 100 Jahre. Wie alt war der Sohn?

x Jahre alt;

$$2x + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}x + 1 = 100;$$

$$8x + \tfrac{4}{2}x + x + 4 = 400;$$

$$8x + 2x + x = 400 - 4$$

$$11x = 396$$

$$x = \frac{396}{:11} = 36$$ Jahre war der Sohn alt.

Probe:

$$72 + 18 + 9 + 1 = 100$$ Jahre.

Ein Vater sprach zu seinem Sohne: Das Geld, welches ich in meiner Hand verschlossen halte, soll dein gehören, wenn du berechnest, wie viel es ist. Nimmst du die Anzahl der von mir gehaltenen Kreuzer halb, dann $1/_5$tel und $1/_7$tel fach, so erhältst du eine Summe, die um 1 kleiner ist, als die verschlossene Kreuzerzahl. Wie viele Kreuzer waren es?

2. Beispiel.

Eine Person verliert im ersten Spiele die Hälfte ihres Geldes und ½ fl.; dann im zweiten Spiele des Restes Hälfte und ½ fl., hierauf im dritten Spiele des jetzigen Restes Hälfte und ½ fl. Derselben blieb nun nichts mehr übrig. Wie viel Geld hatte sie verloren?

Sie verlor x fl., die sie auch Anfangs hatte, und zwar:

	Rest
I. $\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}$	$x - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2};$
II. $\frac{x}{2} - \tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}$	$x - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2} - \frac{x}{2} + \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}$
III. $\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{8}x + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}$	

$$I. + II. + III. = \tfrac{3}{2}x - \tfrac{3}{4}x + \tfrac{1}{8}x + \tfrac{3}{2} - \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{8} = x;$$

$$12x - 6x + x + 12 - 6 + 1 = 8x$$

$$7x + 7 = 8x$$

$$8x - 7x = x = 7$$ fl. hatte die Person Anfangs.

Probe.

		Rest.
I.	$\frac{7}{2} + \frac{1}{2} = 4$ fl.	3 fl.
II.	$\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$ »	1 »
III.	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ »	-- »
	Summe = 7 fl.	

Eine Person verspielt das erste Mal die Hälfte ihres Geldes und ½fl., das zweite Mal die Hälfte des Restes und $\frac{1}{2}$ fl. und das dritte Mal des jetzigen Restes Hälfte und 2 fl. Da dieselbe all' ihr Geld verloren, so fragt es sich, wie viele fl. sie Anfangs gehabt habe.

3. Beispiel.

Ein Kaufmann vermehrt jährlich sein Geld um $\frac{1}{3}$, weniger 200 Kronenthalern, die er in das Hauswesen braucht. Nach drei Jahren ist er zweimal reicher, als er Anfangs gewesen war. Wie viele Kronenthaler hatte derselbe Anfangs?

x Kronthlr. hatte er Anfangs;

I. $x + \frac{1}{3}x - 200$

II. $x + \frac{1}{3}x - 200 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}x - \frac{1}{3} \cdot 200 - 200$

Ansatz:

III. $x + \frac{1}{3}x - 200 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}x - \frac{1}{3} \cdot 200 - 200 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}x - \frac{1}{3} \cdot 200 + \frac{1}{9}x + \frac{1}{27}x - \frac{1}{9} \cdot 200 - \frac{1}{3}\,200 - 200 = 2x$

Auflösung:

$27x + 9x - 5400 + 9x + 3x - 1800 - 5400 + 9x + 3x - 1800 + 3x + x - 600 - 1800 - 5400 = 54x;$

$64x - 22200 = 54x;$

$64x - 54x = 22200$

$10x = 22200$

$x = 2220$ Krthlr. hatte der Kaufm. Anfangs.

Probe.

I. 2220 + 740 — 200 = 2760 Krthlr.
II. 2760 + 920 — 200 = 3480 »
III. 3480 + 1160 — 200 = 4440 »
Aber 4440 = 2 × 2220.

Ein Kaufmann vermehrt sein Vermögen jährlich um den dritten Theil, weniger 100 ℔. Sterling, die er zur Haushaltung verwendet. Er wird nach 3 Jahren nochmal so reich als er Anfangs war. Wie viel hatte er also im Vermögen?

4. Beispiel.

Ein Eilbote A macht täglich a Meilen und ist schon c Tage voraus. Ein anderer B, welcher von dem nämlichen Orte aus und auf demselben Wege jenem nachgeschickt wird, macht täglich b Meilen. In wie vielen Tagen wird B den A einholen?

In x Tagen! In x Tagen macht A an Meilen ax und B macht bx; A hat ac Meilen voraus, weil er täglich a macht. Mithin ist, weil beider Wege gleich sein müßen:

$$ax + ac = bx;$$
$$ax - bx = - ac$$
$$x(a - b) = - ac$$
$$x = \frac{-ac}{a-b} \text{ Tage.}$$

Wenn a = b; so ist $x = \frac{-bc}{b-b} = \infty$ Tagen (§. 14.); wenn b = o, ist $x = \frac{-ac}{a} = -c$ Tage; wenn die Boten einander entgegen gehen, ist a = — a, und x $= \frac{ac}{(a+b)}$ Tage.

Ein Kurier macht täglich $10\frac{1}{2}$ Meile; nach 8 Tagen wird ihm ein anderer nachgesandt, der täglich $12\frac{3}{4}$ Meilen macht. Wann wird dieser jenen erreichen? Hier ist $10\frac{1}{2} = a$, $12\frac{3}{4} = b$, $8 = c$, und $x = \frac{-10\frac{1}{2} \times 8}{10\frac{1}{2} - 12\frac{3}{4}}$ $= \frac{-84}{-2\frac{1}{4}} = \frac{-84}{-\frac{9}{4}} = +\frac{336}{9} = 37\frac{1}{3}$ Tage.

Wenn b > a, so trifft es auf 1 Tag b — a Meilen Unterschied, also auf ac Meilen Unterschied trifft es $\frac{ac}{b-a}$ Tage $= x = \frac{10\frac{1}{2} \times 8}{12\frac{3}{4} - 10\frac{1}{2}} = 37\frac{1}{3}$ Tage, wie vorher.

Ein Kurier, welcher täglich 10 Meilen macht, ist $1\frac{1}{2}$ Tage voraus. Er soll zurückgeholt werden, ehe er über 60 Meilen zurückgelegt hat. Wie viele Meilen muß der nachgeschickte Bote täglich machen?

$$a = 10$$
$$b = ?$$
$$c = 1\frac{1}{2}$$
$$x = \frac{60}{:10} = 6 \text{ Tage;}$$

$$b = \frac{-10 \cdot 1\frac{1}{2}}{10 - b} = \frac{-15}{10 - b};\ 60 - 6b = -15;$$

$$-6b = -15 - 60$$
$$6b = 15 + 60$$
$$6b = 75$$

$b = \frac{75}{6} = \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}$ Meilen muß der zweite Bote täglich zurücklegen.

Zwei Freunde reisen einander entgegen. Beide sind 80 Meilen von einander entfernt. Der erste macht täglich 4, der zweite 6 Meilen. Wann und wo treffen sie sich?

$$a = 4$$
$$b = 6$$
$$c = \frac{80}{4} = 20 \qquad x = \frac{4 \cdot 20}{(4 + 6)} = \frac{80}{10} = 8 \text{ Tage.}$$

In 8 Tagen treffen sie sich, da der eine 32, und der andere 48 Meilen gemacht hat.

5. Beispiel.

Als einer gefragt wurde, wie viel es auf der Uhr wäre, antwortete er: Zwischen 3 und 4 Uhr decken sich beide Zeiger genau. Wie spät war es? Die Wege der beiden Uhrzeiger verhalten sich wie 5 : 60 oder 1 : 12. Bei 3 Uhr steht 15 Minuten; es ist $15 + \frac{1}{12} x = x$; denn die Minuten x, die bei der Deckung der Zeiger der Viertelstundenzeiger weiset, sind gleich dem vorausgenommenen Wege des Stundenzeigers (= 15) und dem Zwölftel der Minuten, die der letzte noch zurücklegt, bis jener ihn einholt; es ist nun x zur Uebung zu finden, nämlich $x = 16\frac{4}{11}$ Min. nach 3 Uhr. Wenn die beiden Zeiger zwischen 3 und 4 Uhr in entgegengesetzter Richtung eine gerade Linie bilden; so ist offenbar $(30 + 15)^{\text{Min.}} + \frac{11}{12} x = x$ und x = ? Minuten nach 3 Uhr.

Hieher gehört zum Theile auch Zenons berühmtes Problem: Achilles und eine Schnecke laufen in die Wette. Die Schnecke ist 10 Stadien voraus und Achilles 10mal schneller, als die Schnecke. Wo holt jener diese ein? In der Zeit 1 macht Achilles 10, und die Schnecke 1; also macht Achilles in x Zeit 10x und die Schnecke $1 \times x = x$; mithin ist $10x = x + 10$, und in $x = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$ Stadium der Schnecke holt sie Achilles ein *).

*) Hr. Mich. Ungermann, mein vorzüglicher mathem. Schüler, nun Prof. in Freising, hat letztere Aufgabe so bündig gelöset.

6. Beispiel.

Ein Wirth hat zweierlei Weine. Die Maß des bessern kostet a kr., die Maß des geringern b kr.; nun soll er die Quantität M an Maßen davon vermischen, und c kr. soll der Werth der gemischten Maß sein. Wie viele Maß von jeder Sorte kommen zur Mischung?

Es kommen x Maß guten, also M — x Maß schlechten Weines zur Mischung; mithin ist ax der Werth des bessern, und b(M — x) der Werth des schlechtern Weines; der Werth des Gemisches ist cM. Somit ist $ax + b(M - x) = cM$; $ax + bM - bx = cM$; $ax - bx = cM - bM$; $(a - b)\,x = M(c - b)$; $x = \frac{c - b}{a - b} \cdot M$; z. B. Jemand will einen Wein à 45 kr. per Maß mit einem Weine zu 36 kr. die Maß so mischen, daß von 100 Maß (= 1 Eim., 40 Mß.) Gemisch jede 40 kr. gelte. Wie viele Maß von jeder Sorte kommen zur Mischung?

$a = 45$ $b = 36$ $M = 100$ $c = 40$	$x = \frac{40 - 36}{45 - 36} \cdot 100 = \frac{4}{9} \cdot 100 = \frac{400}{9} = 44\frac{4}{9}$ Maß des bessern, also $100 - 44\frac{4}{9} = 55\frac{5}{9}$ Mß. des schlechtern.

Probe.

$44\frac{4}{9} + 55\frac{5}{9} = 100$ Mß. Gemisch;

(guter) $44\frac{4}{9} \times \frac{3}{4}$ fl. $= \frac{1200}{36} = \frac{300}{9} = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}$ fl.

(schlechter) $55\frac{5}{9} \times \frac{3}{5}$ fl. $= \frac{1500}{45} = \frac{300}{9} = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}$ fl.

Summe $= 66\frac{2}{3}$ fl.

Auch ist $100 \times \frac{2}{3} = \frac{200}{3}$ fl. $= 66\frac{2}{3}$ fl. (Gemisch.)

Wird Wasser zu Wein geschüttet, so ist $b = 0$, und $x = \frac{cM}{a}$.

Jemand hat zweierlei Getreide; ein Schäffel des bessern kostet 20 fl., ein Schäffel des schlechtern 17 fl. Wenn er nun von diesem Getreide eine Mischung von 25 Schäffeln machte, und 14 schlechtere Schäffel darunter nahm, wie theuer ist dann der gemischte Schäffel?

$? \; c$
$M = 25$
$a = 20$
$b = 17$
$x = 25 - 14 = 11$

$$11 = \frac{c - 17}{20 - 17} \times 25;$$

$$220 - 187 = 25c - 425;$$
$$33 + 425 = 25c;$$
$$25c = 458;$$
$$c = \frac{458}{25} = 18\tfrac{8}{25}$$ fl. ein gemischter Schäffel.

$$\begin{array}{r} 208 \\ 200 \\ \hline 8 \end{array}$$

7. Beispiel.

Ein Hauptmann will unter seine Soldaten eine Beute vertheilen. Wenn er jedem Soldaten 5 fl. gibt, so sind 300 fl. zu wenig; gibt er aber jedem Manne 4 fl., so bleiben ihm 200 fl. übrig. Wie viele Soldaten waren es? Wie groß war die Beute?

Es waren x Mann; 5x fl.; 4x fl.; mithin:

$5x - 300 = 4x + 200$

$x = 500$ Mann, also $2500 - 300$ oder $2000 + 200$ fl. Beute.

Probe.

$$:500 \left| \begin{array}{r} 2200 \\ 2500 \end{array} \right| 5; \quad (-)300 \qquad :500 \left| \begin{array}{r} 2200 \\ 2000 \end{array} \right| 4 \quad (+)200$$

Man kann diese Aufgabe auch mit zwei unbekannten Größen (x fl. die Beute, y Mann) lösen:

$$\frac{x + 300}{y} = 5; \qquad \frac{x - 200}{y} = 4;$$

$$x + 300 = 5y; \qquad x - 200 = 4y;$$
$$x - 200 = 4y$$
$$- \quad + \quad -$$

Mann $500 = y$; $\qquad x + 300 = 5 \times 500$

$$x = 2500 - 300 = 2200 \text{ fl.}$$

Sieh unten §. 72.

Auch so angesetzt, wenn x die Beute ist:

$$\frac{x + 300}{5} = \frac{x - 200}{4}!$$

Die Auflösung zur Uebung!

8. Beispiel.

Ein 600 Eimer hältiger Brunnen wird durch 3 Röhren gefüllt. Die erste Röhre allein würde ihn in 3, die zweite allein in 4, und die dritte allein in 6 Tagen anfüllen. Wenn nun alle 3 Röhren zumal Wasser hineinströmen, wie bald wird der Brunnen voll sein?

In x Tagen! Auf 3 Tage kommen 600 Eim., auf x Tage also 200x Eim.; auf 4 Tage kommen 300 Eim., mithin auf x Tage 75x Eim.; endlich treffen auf 6 Tage 600 Eim., somit auf x Tage 100x Eimer;

$$\text{ferner } 200x + 75x + 100x = 600;$$
$$375x = 600$$
$$x = \frac{600}{375} \overset{5}{=} \frac{120}{75} \overset{5}{=} \frac{24}{15} \overset{3}{=} \frac{8}{5};$$

In x Tagen = $1\frac{3}{5}$ Tagen ist der Brunnen voll.

Probe.

$$1\tfrac{3}{5} \times 200 + 1\tfrac{3}{5} \times 75 + 1\tfrac{3}{5} \times 100 = 600 \text{ Eimer}.$$

9. Beispiel.

Helwig und Blumberg, zwei Culturfreunde, traten zur nämlichen Zeit ihren Edelsitz an. Bei dem ersten befanden sich 30, bei dem zweiten 10 Morgen Feldbau. Sie hatten den gemeinnützigen Entschluß gefaßt, daß jeder für sich jährlich 5 Morgen von dem benachbarten großen Moose urbar machen wollte. Sie thaten es auch wirklich, und als sie das ganze Moos cultiviert hatten, fehlte dem Blumberg noch der 8te Theil seines Feldbaues, um mit dem Helwig gleich viel zu besitzen. Wie lang trieben sie das Culturgeschäft, und wie viel besaß jeder an Feldmorgen? Sie trieben das Culturgeschäft x Jahre lang; 5x Morgen ist also die Zahl der cultivierten Gründe; mithin hatte Helwig 30 + 5x Morgen, und Blumberg 10 + 5x Morgen; der 8te Theil hievon oder

$$\frac{10 + 5x}{8} = \frac{10}{8} + \frac{5x}{8} = \frac{5}{4} + \frac{5x}{8}.$$

Dieses addiert zu 10 + 5x muß 30 + 5x gleich sein. Also:

$$30 + 5x = 10 + 5x + \frac{5}{4} + \frac{5x}{8};$$
$$30 = 10 + \frac{5}{4} + \frac{5x}{8};$$
$$240 = 80 + 10 + 5x;$$
$$240 - 90 = 150 = 5x;$$
$$x = \frac{150}{5} = 30 \text{ Jahre lang triebensie das Geschäft der Cultur.}$$

Ferner hatte Helwig 30 + 150 = 180 Morgen Feld, und Blumberg 10 + 150 = 160 Morgen Feld. Der achte Theil von 160 ist 20 Jauchert, die dem Blumberg noch mangelten, um mit Helwig gleich viel zu besitzen.

10. Beispiel.

Ein Vater hinterließ ein Vermögen, das unter seine Kinder auf nachstehende Weise vertheilt wurde: Das erste Kind erhält zum Voraus 100 fl., und den 10ten Theil des noch übrigen Vermögens; das zweite Kind bekommt 200 fl. voraus, und den 10ten Theil des jetzt noch übrigen Vermögens. Auf diese Weise ward die Vertheilung fortgesetzt, und am Ende zeigte es sich, daß alle Kinder gleich viel bekamen. Wie groß war nun die Erbschaft? Wie groß war der Antheil eines jeden Kindes? Wie viele Kinder waren es?

Die Erbschaft war x fl.; $\frac{x-100}{10}$ ist der 10te Theil des noch übrigen Vermögens;

$$\frac{x - 100 - 200 - \frac{x}{10} - \left(\frac{-100}{10}\right)}{:10}$$

ist wieder der zweite 10te Theil

$$= \frac{x - 300 - \frac{x}{10} + 10}{:10}.$$

Da jedes Kind gleichviel erhielt, setze man die Antheile der ersten 2 Kinder einander gleich; d. i.

$$100 + \frac{x-100}{10} = 200 + \frac{x - 300 - \frac{x}{10} + 10}{10};$$

$$1000 + x - 100 = 2000 + x - 300 - \frac{x}{10} + 10$$

$$10000 + 10x - 1000 = 20000 + 10x - 3000 - x + 100$$

$$9000 = 17100 - x;$$

$$-x = 9000 - 17100 = -8100 \text{ fl.};$$

$$x = 8100 \text{ fl. war die Erbschaft;}$$

das erste Kind erhielt $100 + \frac{8100-100}{10} = 100 + 800 = 900$ fl.;

das Zweite: $200 + \frac{8100 - 100 - 200 - 800}{10} = 200 + \frac{7000}{10} = 200 + 700 = 900$ fl.; jedes Kind bekam 900 fl.; und es waren 9 Kinder.

Ein Vater hinterließ ein Vermögen, das unter seine Söhne auf nachstehende Weise vertheilt wurde: Der erste

Sohn erhielt zum Voraus 1000 fl. und den 6ten Theil des Restes; der zweite 2000 fl. voraus und den 6ten Theil des jetzigen Restes u. s. f. bis zum Schlusse der Theilung, wo es sich zeigte, daß jeder der Söhne gleich viel bekam. Wie groß war das Vermögen? Wie viel erhielt jeder Sohn? Wie viele Söhne waren es?

11. Beispiel.

Für jeden Tag der Arbeit erhält Jemand 2 fl.; er muß aber für jeden Tag des Müssigganges $\frac{1}{2}$ fl. Strafe bezahlen. Nach 300 Tagen hatte derselbe weder etwas gewonnen noch etwas verloren. Wie lange arbeitete er? Wie lange ging er müssig?

Er arbeitete x Tage, und ging sodann 300 — x Tage müssig; also bekam er 2x fl., und mußte $\frac{1}{2}(300 - x)$ fl. bezahlen; mithin $2x - \frac{1}{2}(300 - x) = 0$;

$$2x - 150 + \frac{1}{2}x = 0$$
$$\frac{5}{2}x = 150;$$
$$x = \frac{2}{5} \times 150 = 60$$ Tage Arbeit, und 240 Tage Müssiggang.

Die Probe zur Uebung!

Um den Vorzug der Algebra vor der Satzregel (§. 70) zu erkennen, wird dieses Beispiel nach der genannten Weise gelöset. Er soll 12 Tage gearbeitet haben; dann war er 288 Tage müssig; folglich bekam er 24 fl., mußte aber 144 fl. als Strafe erlegen; der Rest 144 — 24 = 120 fl. ist der Fehler, weil 0 herauskommen sollte. Nun mag er 24 Tage gearbeitet haben, also 276 Tage müssig gegangen sein. Jetzt gewinnt er 48 fl. und verliert 138 fl. Der Rest 138 — 48 = 90 fl. ist der Fehler. Mithin

Satz	Fehler
12	120
24	90
	30

$$\begin{array}{r} 12 \\ 90 \\ \hline 1080 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 120 \\ 24 \\ \hline 480 \\ 24 \\ \hline 2880 \\ -1080 \\ \hline 30|1800|60 \end{array}$$ Tage Arbeit ꝛc.

12. Beispiel.

Ein Vater wurde über das Alter seines Sohnes ge-

fragt. Er antwortete: Vor 5 Jahren war ich dreimal so alt, als mein Sohn; in 7 Jahren werde ich zweimal so alt sein als er. Wie alt war der Sohn?

Der Sohn zählte gegenwärtig $x + 5$ Jahre; vor fünf Jahren zählte er nämlich x Jahre, und nach 7 Jahren wird er $x + 5 + 7$ Jahre alt sein. Vor 5 Jahren war der Vater $3x$ Jahre alt, gegenwärtig $3x + 5$ Jahre, und nach 7 Jahren wird er $3x + 5 + 7$ Jahre zählen. Nun ist offenbar $\frac{3x + 5 + 7}{2} = x + 5 + 7$; $x = 12$ Jahre.

Probe.

Gegenwärtig ist der Sohn 17 Jahre alt, der Vater 41 Jahre; also vor 5 Jahren, wo der Sohn 12 Jahre alt war, zählte der Vater 36, und da war denn $3 \times 12 = 36$. Nach 7 Jahren ist der Sohn 24 Jahre alt, und der Vater 48; somit $2 \times 24 = 48$.

§. 72.

Gleichungen mit zwei unbekannten Größen löset man auf 1) entweder durch die Comparation oder 2) durch die Substitution oder 3) durch die vier Species (Elimination). Bei der Comparation transponiert man in jeder Gleichung die unbekannte Größe y, so daß man zwei Werthe für x erhält, die dann verglichen werden, und eine Gleichung mit der einzigen unbekannten Größe y liefern, deren gefundenen Werth man in einer transponierten x Gleichung einsetzt, um x zu erhalten; z. B.

$$2x + 3y = 8$$
$$4x - 5y = -6;$$

$$2x = 8 - 3y;$$
$$x = \frac{8 - 3y}{2};$$

ferner: $$4x = -6 + 5y;$$
$$x = \frac{-6 + 5y}{4};$$

$$\frac{8 - 3y}{2} = \frac{-6 + 5y}{4};$$

$$32 - 12y = -12 + 10y;$$

$$32 + 12 = 10y + 12y;\ 44 = 22y;\ y = \frac{44}{22} = 2;$$

$$x = \frac{8 - 3y}{2} = \frac{8 - 3 \,.\, 2}{2} = \frac{8 - 6}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Probe.

$$2 \times 1 + 3 \times 2 = 8.$$
$$4 \times 1 - 5 \times 2 = -6.$$

Bei der Substitution transponiert man in der ersten

Gleichung die unbekannte Größe y, so daß man einen Werth für x erhält. Diesen Werth von x setzt man statt x in der 2ten Gleichung, wodurch man eine Gleichung mit der einzigen unbekannten Größe y erhält, nach deren Auflösung man den Werth von y in die transponierte Gleichung bringt, um x zu finden; z. B.

$$2x + 3y = 8 \quad | \quad 2x = 8 - 3y;$$
$$4x - 5y = -6$$
$$4\left(\frac{8 - 3y}{2}\right) - 5y = -6 \quad | \quad x = \frac{8 - 3y}{2}$$
$$2(8 - 3y) - 5y = -6$$
$$16 - 6y - 5y = -6$$
$$16 - 11y = -6$$
$$-11y = -22$$
$$y = 2$$
$$x = \frac{8 - 3 \times 2}{2} = 1.$$

Bei der Elimination multipliciert man mit dem Coefficienten des ersten Gliedes der obern Gleichung die ganze untere Gleichung, und mit dem Coefficienten des ersten Gliedes der untern Gleichung die ganze obere Gleichung. Nach Abziehung dieser Producte erhält man eine Gleichung mit der einzigen unbekannten Größe y, nach deren Auflösung man den Werth von y in eine der Gleichungen setzt, um x zu erhalten; z. B.

$$2x + 3y = 8$$
$$4x - 5y = -6$$
$$8x - 10y = -12$$
$$8x + 12y = 32$$
$$- \quad - \quad -$$
$$-22y = -44$$
$$y = 2$$
$$2x + 3 \times 2 = 8$$
$$2x = 8 - 6$$
$$x = \tfrac{2}{2} = 1.$$

Die Probe zur Uebung!

§. 73.

1. Beispiel.

Eine Mischung von Gold und Silber, zusammen 36 ℔. schwer, verliert im Wasser gewogen $2\frac{1}{2}$ ℔.; ferner verliert das Gold im Wasser $\frac{1}{19}$ und das Silber $\frac{1}{11}$ seines Gewichtes. Wie viele Pfund Gold und wie viele Pfund Silber war im Gemische?

x ℔. Gold, y ℔. Silber;

$$x + y = 36$$
$$\tfrac{1}{19}x + \tfrac{1}{11}y = 2\tfrac{1}{2}$$

Oder:

x ℔. Gold, also $(36 - x)$ ℔. Silber;

$$\tfrac{1}{19}x + \tfrac{1}{11}(36 - x) = 2\tfrac{1}{2}$$

Zur Uebung: ? x, y. Dann die Probe!

2. Beispiel.

Zwei Brüder zählen mit einander 49 Jahre; und es ist einer derselben um 3 Jahre älter als der andere. Wie alt ist jeder? (§. 9)

Einer ist x, der andere y Jahre alt; also

$$\begin{array}{c|c} x + y = 49 & x + y = 49 \\ x - y = 3 & x - y = 4 \\ & - \; + \quad - \\ \hline 2x = 52 & 2y = 46 \end{array}$$

$x = 26$ Jahre; $y = 23$ Jahre.

3. Beispiel.

Eine Lieferung von 3 Ztn. Zucker und 4 Ztn. Kaffee wurde um 950 fl., eine zweite von 2 Ztn. Zucker und 5 Ztn. Kaffee um 925 fl. bei einerlei Waarenpreise bezahlt. Wie theuer kam das Pfund jeder Sorte?

x fl. das ℔. Zucker, y fl. das ℔. Kaffee;

$$300x + 400y = 950$$
$$200x + 500y = 925$$

? x; y zur Uebung nebst Probe.

4. Beispiel.

Zwei Knaben besitzen Aepfel. A sagt zu B: Wenn du mir einen von deinen Aepfeln gibst, so habe ich noch so viele Aepfel als du. B aber entgegnet: Wenn du mir einen von deinen Aepfeln schenkest, so habe ich gerade so viele als du. Wie viele Aepfel hatte jeder der Knaben?

$$\begin{array}{lccc} & A & & B \\ \text{Aepfel} = & x & & y \\ & x + 1 & = & 2 \times (y - 1) \\ & x - 1 & = & y + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} x + 1 = 2y - 2 \\ x - 1 = y + 1 \\ - \; + \quad - \; - \\ \hline 2 = y - 3 \end{array}$$

$y = 5$; $x = 2 \times 5 - 2 - 1 = 7$.

5. Beispiel.

In einer Familie waren mehrere Kinder. Jemand erkundigte sich um ihre Anzahl. Da sprach der älteste Sohn: Ich habe gerade so viele Schwestern als Brüder. Und ich, fiel die älteste Schwester ein, habe nur halb so viele Schwestern als Brüder. Wie muß man sich diese Antworten erklären?

Es sind x Brüder, y Schwestern

$$x - 1 = y; \qquad y - 1 = \frac{x}{2};$$
$$x = 1 + y; \qquad 2y - 2 = x$$
$$1 + y = 2y - 2$$
$$3 = 2y - y$$
Schwestern $3 = y$
$$x - 1 = 3$$
$x = 4$ Brüder.

Der Bruder hat 3 Schwestern und 3 Brüder; die Schwester hat 2 Schwestern und 4 Brüder.

6. Beispiel.

$$x - y = a$$
$$x + ny = b$$
$$x + z = c$$

$$x = a + y$$
$$x = b - ny$$

compariert: $a + y = b - ny;$

$$a - b = -y - ny = (-1 - n)y = -(1 + n)y;$$

$$y = \frac{a - b}{-(1 + n)};$$

$$x - y = a$$

y substituiert: $x - \left(\frac{a - b}{-(1 + n)}\right) = a$

$$x = a + \frac{a - b}{-(1 + n)};$$

$$x + z = c;$$

$a + \frac{a - b}{-(1 + n)} + z = c$; x substituiert;

$$z = c - a - \frac{a - b}{-(1 + n)}.$$

Probe für die zweite Gleichung.

$$x + ny = b; \quad a + \frac{a - b}{-(1+n)} + \frac{na - nb}{-(1+n)} =$$

$$a + \frac{a - b + n(a-b)}{-(1+n)} = \frac{-a - na + na - nb + a - b}{-(1+n)}$$

$$= \frac{-nb - b}{-(1+n)} = \frac{-(1+n)b}{-(1+n)} = b.$$

Die übrige Probe zur Uebung!

Wenn $n = 1$, $a = 1$, $b = 2$, $c = \frac{1}{2}$; so ist

$$x - y = 1; \text{ und } x = 1 + \frac{1-2}{-(1+1)} = 1 + \frac{-1}{-2} = 1\tfrac{1}{2};$$

$$x + y = 2; \qquad y = \frac{1-2}{-(1+1)} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2};$$

$$x + z = \frac{1}{2}; \qquad z = \frac{1}{2} - 1 - \frac{1-2}{-(1+1)};$$

$$z = -\frac{1}{2} - \frac{-1}{-2} = -1.$$

§. 74.

Die **unbestimmten Gleichungen**, bei deren Auflösung man einen adäquaten Werth für eine unbekannte Größe annimmt, um die von dieser abhängige andere unbekannte zu finden, richten sich ganz nach den bisherigen Regeln; z. B. Wie kann man mit bloß Siebnern und Siebenzehnern jede Kreuzer-Summe von 1 angefangen bezahlen?

x = Siebner + Siebenzehner
y = Siebenzehner
— —

$x - y$ = Siebner

$$17y + 7(x - y) = a \text{ kr.}$$
$$17y + 7x - 7y = a$$
$$10y = a - 7x$$
$$y = \frac{a - 7x}{10}.$$

Um nun die Siebenzehner zu finden, nimmt man x so an, daß die dafür gesetzte Zahl mit 7 multipliciert, die Endziffer der Größe a bekommt. Man soll einen Kreuzer

bezahlen; $a = 1$, $x = 3$, $y = \frac{1 - 7 \times 3}{10} = \frac{1 - 21}{10}$ $= -2$. Man erhält 2 Siebenzehner zurück. Weil $x - y$ die Siebner bedeutet, so sind diese $= 3 - (-2) = 3 + 2 = 5$ Siebner gibt man hin. Eben so bezahle man jetzt $a = 1$ fl. $= 60$ kr.!

Ein Bauer hat dreierlei Getreidsorten. Von der ersten kostet ein Schäffel 8 fl., von der zweiten 10 fl. und von der dritten 15 fl. Er will 30 Schäffel so mischen, daß ein Schäffel Gemisch 12 fl. gelte. Wieviel muß er von jeder Sorte dazu nehmen? Von der ersten x, von der zweiten y, von der dritten z;

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 30 \\ 8x & + & 10y & + & 15z & = & 30 \times 12 = 360; \\ 8x & + & 8y & + & 8z & = & 8 \times 30 = 240 \\ - & & - & & - & & - \quad\quad - \\ \hline & & 2y & + & 7z & = & 120; \quad y = \frac{120 - 7z}{2} = 60 - \tfrac{7}{2}z. \end{array}$$

Nimmt man nun von der dritten Sorte 14 Schäffel $= z$, so nimmt man von der mittlern $y = 60 - 49 = 11$ Schäffel und von der ersten $x = 30 - 14 - 11 = 5$ Schäffel; denn $x + y + z = 5 + 11 + 14 = 30$ Schäffel, und $14 \times 15 + 11 \times 10 + 5 \times 8 = 30 \times 12 = 360$ fl.

Zur Uebung! 50 Personen, nämlich Männer, Frauen und Kinder, verzehren miteinander 60 fl. Ein Mann zahlt 2 fl., eine Frau 1 fl. und ein Kind ½ fl. Wie viele Männer, wieviele Frauen, wieviele Kinder waren es?

Ein Bauer hat Aepfel. Gibt er 6 um 1 kr., so bleiben ihm 5 Aepfel; gibt er 13 um 2 kr., so bleiben ihm 10, und gibt er 20 um 3 kr. hin, so bleiben ihm 13 Aepfel übrig. Am Ende hat er 182 kr. = 3 fl. 2 kr. gelöſ't, nachdem er noch 8 Aepfel um 1 kr. hin gegeben hatte. Wie viel waren es Aepfel?

6	Aepfel	= 1	kr.
13	»	= 2	»
20	»	= 3	»
39	Aepfel	= 6	kr.

6 kr. 39 Aepfel 182 kr.? Antw. 1183 Aepfel.

Aber 1183 läßt sich durch 6, 13 und 20 nicht nach Verlangen theilen, sondern die von da aufsteigend versuchsweise gefundene Zahl 1193.

Also waren es 1193 Aepfel; denn gibt man z. B. 6 um 1 kr. so bleiben 5 übrig;

$$6 \mid 1193 \mid 198\tfrac{5}{6} \text{ kr.}$$

```
6|1193|198⁵/₆ kr.
  6
  59
  54
   53
   48
    5
```

Aber $\frac{5}{6}$ kr. sind = 5 Aepfel u. s. f.

Will man nun wissen, welchen Verkauf der Bauer jedes Mal im Einzelnen eingehalten habe, so setze man an:

Aepfel	kr.	Aepfel	
6	1	x	$\frac{x}{6}$;
13	2	y	$\frac{2y}{13}$;
20	3	z	$\frac{3z}{20}$;
8	1	$1 = \frac{1}{8}$ kr.	

also $x + y + z = 1193$ Aepfel;

Dann: $\frac{x}{6} + \frac{2y}{13} + \frac{3z}{20} + \frac{1}{8} \times 8 = 182$ kr.

$$\frac{x}{6} + \frac{2y}{13} + \frac{3z}{20} + \frac{1}{8} \times 8 = 182$$
$$\frac{x}{6} + \frac{y}{6} + \frac{z}{6} = 198\tfrac{5}{6}$$
$$- \quad - \quad - \qquad -$$
$$-\frac{y}{78} - \frac{z}{60} + 1 = -16\tfrac{5}{6}$$
$$\frac{y}{78} + \frac{z}{60} = 17\tfrac{5}{6} = \frac{107}{6};$$
$$\frac{z}{60} = \frac{107}{6} - \frac{y}{78} = \frac{1391 - y}{78}$$
$$z = \frac{(1391 - y) \cdot 60}{78} = \frac{(1391 - y) \cdot 10}{13}$$
$$= \frac{13910 - 10y}{13} = 1070 - \tfrac{10}{13}y.$$

Ist nun $y = 13$, so ist $z = 1070 - \frac{10}{13} \times 13 = 1060$, und $x = 1193 - 13 - 1060 = 1193 - 1073 = 120$ Aepfel.

Probe.

$120 + 1060 + 13 = 1193$ Aepfel;

Aepfel	kr.	Aepfel	
6	1	120	= 20 kr.
13	2	13	= 2 »
20	3	1060	= 159 »
8	1	8	= 1 »
			182 kr.

Der k. k. Hr. Regimentsadjutant Oberlieutenant v. Winkler theilte mir als Resultat mit: $x = 12$, $y = 793$, $z = 380$, und $v = 8$ Aepfel.

Man theile die Zahl 100 in solche 2 Theile, von denen der erste durch 3, der andere durch 5 theilbar ist. Der erste $= x$, der zweite $= y$; also $x + y = 100$; und $\frac{x}{3} = A$, $\frac{y}{5} = B$; mithin $x = 3A$; $y = 5B$; also $3A + 5B = 100$; ferner $3A = 100 - 5B$, und $A = \frac{100 - 5B}{3} = 33\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3}B$.

Dieser letzte Ausdruck ist offenbar $\dot{3}\dot{3} - \dot{1}\dot{B} + \dot{\frac{1}{3}} - \dot{\frac{2}{3}}\dot{B}$ $= 33 - B + \frac{1 - 2B}{3}$. Man setze wieder $\frac{1 - 2B}{3} = - C$, weil B negativ ist. Es ist um $1 - 2B = - 3C$, und $- 2B = - 3C - 1$; $2B = 3C + 1$; $B = \frac{3C + 1}{2}$.

Dieß ist wieder $1\frac{1}{2}C + \frac{1}{2} = 1C + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2} = C + \frac{C + 1}{2}$.

Jetzt sei $\frac{C + 1}{2} = D$; $C + 1 = 2D$; $C = 2D - 1$.

Nimmt man nun für D die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 an; so ist C = 1, 3, 5, 7, 9, 11, und B = 2, 5, 8, 11, 14, 17; dann A = 30, 25, 20, 15, 10, 5;

endlich x	=	90,	75,	60,	45,	30,	15, und
y	=	10,	25,	40,	55,	70,	85.
Summa	=	100,	100,	100,	100,	100,	100.

Man suche die Anzahl der Gänse $= x$ und jene der Ferkel $= y$, die gekauft worden waren. Ein Ferkel galt 29 Groschen, eine Gans 17 Groschen. Um die Ferkel gab man 7 Groschen mehr als für die Gänse. Weil es x Gänse waren, so zahlte man dafür 17x Groschen, und

für die Ferkel gab man 29y Groschen. Da man für die Ferkel 7 Groschen mehr bezahlte, als für die Gänse; so ist $29y - 7 = 17x$; $x = \frac{29y - 7}{17} = 1\frac{12}{17}y - \frac{7}{17}$
$= y + \frac{12}{17}y - \frac{7}{17} = y + \frac{12y - 7}{17} = y + A$;
$A = \frac{12y - 7}{17}$; $17A = 12y - 7$; $12y = 17A + 7$;
$y = \frac{17A + 7}{12} = 1\frac{5}{12}A + \frac{7}{12} = A + \frac{5}{12}A + \frac{7}{12}$
$= A + \frac{5A + 7}{12} = A + B$; $B = \frac{5A + 7}{12}$; $12B$
$= 5A + 7$; $A = \frac{12B - 7}{5} = 2\frac{2}{5}B - \frac{7}{5} = 2B + \frac{2}{5}B - \frac{7}{5}$
$= 2B + \frac{2B - 7}{5} = 2B + C$; $C = \frac{2B - 7}{5}$; $5C = 2B - 7$;
$B = \frac{5C + 7}{2} = 2\frac{1}{2}C + \frac{7}{2} = 2C + \frac{1}{2}C + \frac{7}{2} = 2C + \frac{C + 7}{2}$
$= 2C + D$; $D = \frac{C + 7}{2}$; $2D = C + 7$; $C = 2D - 7$.

Man setze $D = 4, 5, 6, 7, 8$; so ist $C = 1, 3, 5, 7, 9$
$B = 6, 11, 16, 21, 26$
$A = 13, 25$ ꝛc.
$y = 19, 36$ Ferkel,
$x = 32, 61$ Gänse.

Schon aus dem Ansatze $29y - 7 = 17x$ ersieht man leicht, daß auch $y = 2$ und $x = 3$. Man kann aber auch $D = 3$ setzen.

Man suche zwei Zahlen mit der Summe 85. Die erste (x) durch 3 dividirt soll 2; die zweite (y) durch 4 dividirt, 3 übrig lassen.

Es gibt $x + y = 85$

und $\frac{x - 2}{3} = A$; $\frac{y - 3}{4} = B$; also

$$x = 3A + 2;\ y = 4B + 3;$$
$$3A + 2 + 4B + 3 = 85;$$
$$3A + 4B = 80;$$
$$3A = 80 - 4B;$$
$$A = \frac{80 - 4B}{3} = 26\tfrac{2}{3} - 1\tfrac{1}{3}B;$$
$$A = 26 + \tfrac{2}{3} - B - \tfrac{1}{3}B;$$
$$A = -B + 26 + \frac{2 - B}{3};$$

$\frac{2 - B}{3} = - C$; $2 - B = - 3C$;

$B = 3C + 2$.

Nun sei $C = 0, 1, 2, 3, 4$ ꝛc. so ist
$B = 2, 5, 8, 11, 14$ ꝛc.
$A = 24, 20, 16, 12$ ꝛc.
$x = 74, 62, 50, 38$ ꝛc.
$y = 11, 23, 35, 47$ ꝛc.

§. 75.

Eine quadratische Gleichung, wo x in höchster Potenz als Quadrat steht, ist doppelt: rein, wenn ausser x^2 kein x mehr erscheint; z. B. $x^2 = 16$; gemischt, wenn ausser x^2 auch x noch vorkommt; z. B. $x^2 + px = q$.

Um eine reine quadratische Gleichung aufzulösen, ziehe man, wenn man auf eine Seite x^2 und auf die andere die bekannten Größen gestellt hat, aus beiden Seiten die Quadratwurzel aus; z. B. $x^2 + 4 = 20$; $x^2 = 20 - 4$; $x^2 = 16$; $\sqrt{x^2} = \sqrt{16}$; $x = \pm 4$ (§. 45.).

Um eine gemischte quadratische Gleichung aufzulösen, gibt es zwei Wege, den der Complierung und jenen der Elimination. Durch die Complierung wird die quadratische gemischte Gleichung so aufgelöset:

1) Man ergänze das Quadrat oder $x^2 + px$ (§. 53.); 2) das Complement addiere man zu beiden Gleichungsseiten, und ziehe auf beiden die Quadratwurzel aus; 3) man transponiert endlich, um x zu erhalten;

nämlich: $x^2 + px = q$;

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} \text{ Complement;}$$

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = q + \frac{p^2}{4}$$

$$\sqrt{x^2 + px + \frac{p^2}{4}} = \pm\sqrt{q + \frac{p^2}{4}};$$

$$x + \tfrac{1}{2}p = \pm\sqrt{q + \frac{p^2}{4}}$$

$$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{p^2}{4}};$$

z. B. $x^2 - 9x = - 14$; darunter:
$x^2 + px = q$, nun ist
$p = -9$; $q = - 14$, und unmittelbar ist

$$x = -\tfrac{1}{2} \cdot -9 \pm \sqrt{-14 + \frac{(-9)^2}{4}}$$

$$x = \tfrac{9}{2} \pm \sqrt{-14 + \tfrac{81}{4}}$$

$$x = \tfrac{9}{2} \pm \sqrt{-\tfrac{56}{4} + \tfrac{81}{4}}$$

$$x = \tfrac{9}{2} \pm \sqrt{\tfrac{25}{4}} = \tfrac{9}{2} \pm \tfrac{5}{2} = \tfrac{14}{2};\ \tfrac{4}{2} = 7;\ 2.$$

Also ist $x = 7;\ 2.$

Probe.

$$7^2 - 9 \times 7 = -14;$$
$$2^2 - 9 \times 2 = -14.$$

Durch die Elimination werden die gemischten quadratischen Gleichungen so aufgelöset: 1) Man dividiere mit dem Exponenten 2 den Coefficienten des zweiten Gliedes, addiere den Quotus zu x, und nenne die Summe y; 2) man transponiere, so daß x erhalten wird; 3) diesen Werth von x substituiere man in der quadratischen Gleichung, wodurch eine reine quadratische Gleichung erhalten wird, worin man y suche; 4) diesen Werth von y setze man in der Gleichung Nro. 1 und 2., und x ist gefunden; nämlich:

$$x^2 + px = q;\ x + \frac{p}{2} = y;\ x = y - \frac{p}{2};$$

$$x^2 = y^2 - py + \frac{p^2}{4}\ (\S.\ 51.);$$

$$px = \quad py - \frac{p^2}{2}$$

$$-q = \quad -q$$

$$o = y^2 - q - \frac{p^2}{4};$$

$$y^2 = q + \frac{p^2}{4}$$

$$y = \pm\sqrt{q + \frac{p^2}{4}}$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{q + \frac{p^2}{4}},\ \text{wie vorher.}$$

§. 76.

1. Beispiel.

Pronikzahl ist die Summe aus dem Quadrate und der Wurzel; z. B. $2^2 + 2 = 6$, $1^2 + 1 = 2$, $10^2 + 10$

= 110 u. s. f. Wenn man nun das Jahr der Erfindung der Algebra (§. 70.) quadrirt, und hiezu das Jahr als □ Wurzel addirt, so erhält man 2529690. Wann ist nun die Algebra erfunden worden? Im Jahre x;

$$x^2 + x = 2529690;$$
$$x^2 + px = q;$$
$$p = 1,\ q = 2529690;\ \text{nun ist §. 75.}$$
$$x = -\tfrac{1}{2}.1 \pm \sqrt{2529690 + \tfrac{1}{4}.1^2}$$
$$x = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{10118761}{4}}$$
$$x = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{3181}{2} = \tfrac{3180}{2} = 1590.$$

2. Beispiel.

Zehn Gulden sollst du für die Tauben bringen!
Nun trage sie zu Markt. Richt's mit dem Preis wohl ein,
Und will dir's etwa ja nicht ganz gelingen,
So mögens weniger sechs Batzen sein!
Doch minder nicht! Hörst du's? Nun, Dorchen, laufe,
Daß du zum Sitz noch kommst! Du kennst ihn schon! —
Das Mädchen läuft, und sinnt, wie sie das Heer verkaufe,
Und sinnt, und drüber flog ein Paar davon!
Weh mir! weint Dorchen, ach! wie wird mir's gehen?
Da setz' ich im Verkaufe einen Rest!
Ich kann die Frau schon drob im Zorne sehen,
Und weiß, daß sie mir keinen Deut erläßt.
Den Jammer hört ein Mädchen in der Nähe,
Die klüger ist, und trefflich rechnen kann.
Die sagt: Mein Kind, warum denn Ach und Wehe?
Da läßt sich helfen; nimm doch Rath nur an.
Auf jede Taube mußt du noch vier Kreuzer schlagen;
Der Tauben auf dem Markt sind heut nicht viel;
Der Draufschlag läßt sich dießmal sicher wagen;
So kommst gewiß du beim Verkauf zum Ziel.
Das Mädchen wagt's, und steigert so die Preise,
Und — dictum factum — der Erlös ist da!
Neun Gulden und neun Batzen sind's, beweise
Mit schöner Eins die Kunst der Algebra!
Wie das so paßte, möchtet gern ihr wissen?]
Wie kam die Summe so geschickt herein?
Wie viel hat Tauben sie verkaufen müßen?
Wie mag der Preis für's Stück gewesen sein?
Das kannst du tappend wohl empirisch finden;
Doch wer's versteht, fährt nicht so hin und her!
Der stellt die Gleichung auf nach festen Gründen,
Und löset sie. Das Kunststück hält nicht schwer! —

Es sind x Tauben gewesen. Alle kosteten 576 kr., also eine $\frac{576}{x}$ kr. Wenn 2 wegflogen, kostete eine $\left(\frac{576}{x}+4\right)$ kr., und ihrer waren noch $x-2$; also gibt $\left(\frac{576}{x}+4\right)(x-2)=576$ kr.;

$$\text{d. h. } \frac{576x}{x}+4x-\frac{1152}{x}-8=576;$$

$$576+4x-\frac{1152}{x}-8=576;$$

$$4x-\frac{1152}{x}-8=0;$$

$$\text{xx)}\quad 4x^2-1152-8x=0;$$

$$:4)\quad x^2-288-2x=0;$$

$$x^2-2x=288$$

$$x=1\pm\sqrt{288+1^2}\ (\S.\ 75);$$

$$x=1\pm\sqrt{289}=1\pm17=18 \text{ Tauben.}$$

P r o b e.

18 | 576 | 32 kr. = 1 Taube;
  54
  36
  36
  —

16 | 576 | 36 kr. = 1 Taube, wenn 2 wegflogen.
  48
  96
  96
  —

36 kr. — 32 kr. = 4 kr. Daraufschlag.

Anders lautet der Ansatz dieses Beispieles von dem k. b. Hrn. Landgerichtsphysicus in Höchstädt, Doctor Karl Flacho (sieh Bundschue's Arithm. IV. Thl. 2. Aufl. p. 76).

Nämlich: $\frac{576}{x}$ kostet eine Taube; $\frac{576}{x-2}$ kostet eine, wenn 2 wegflogen; also beträgt der Unterschied dieser Ausdrücke 4 kr., und $\frac{576}{x-2}-\frac{576}{x}=4$; die Auflösung zur Uebung!

Endlich kann dieses Problem auch so gelöset werden: eine Taube koste y, und ihrer seien x; dann ist $xy=576$ und $(x-2)(y+4)=576$; es ist $y=\frac{576}{x}$; dieses substituiert macht $(x-2)\left(\frac{576}{x}+4\right)=576$, wie oben!

3. Beispiel.

Man ziehe die Quadratwurzel aus $7 \pm 4\sqrt{3}$! Es soll $\sqrt{7 \pm 4\sqrt{3}} = \sqrt{p} + \sqrt{q}$ sein. Mithin ist $7 \pm 4\sqrt{3} = p + q + 2\sqrt{pq}$ (§. 51); ferner $7 = p + q$ und $2\sqrt{pq} = \pm 4\sqrt{3}$; dieses dann quadriert; $4pq = 16 \times 3$ oder $4pq = 48$, somit $pq = 16$, und $p = \frac{16}{q}$. Aber $p = 7 - q$, also ist $\frac{16}{q} = 7 - q$ und $16 = 7q - q^2$ oder $q^2 - 7q = -16$, wo (nach §. 75) $q = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 16} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = 4$. Nun ist $p = 7 - 4 = 3$. Endlich ist $\sqrt{7 \pm 4\sqrt{3}} = \sqrt{3} + \sqrt{4} = \sqrt{3} + 2 = 2 \pm \sqrt{3}$.

Probe.

$$\begin{array}{r} 2 \pm \sqrt{3} \\ \times\, 2 \pm \sqrt{3} \\ \hline 4 \pm 2\sqrt{3} \\ \pm 2\sqrt{3} + 3 \\ \hline 7 \pm 4\sqrt{3}. \end{array}$$

§. 77.

Eine cubische Gleichung, bei der das letzte Glied eines Cubus fehlt, und wo die gegebenen 3 Glieder nach dem cubischen Gesetze des Binomiums (§. 60) fortlaufen, kann durch Ergänzung (§. 61) gelöset werden, wie folgt:

$$x^3 - x^2 + \tfrac{1}{3}x = a;$$

$$(-\tfrac{1}{3})^3 = -\tfrac{1}{27} \text{ Complement;}$$

$$x^3 - x^2 + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{27} = a - \tfrac{1}{27};$$

$$\sqrt[3]{x^3 - x^2 + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{27}} = \sqrt[3]{a - \tfrac{1}{27}};$$

$$x - \tfrac{1}{3} = \sqrt[3]{a - \tfrac{1}{27}};$$

$$x = \tfrac{1}{3} + \sqrt[3]{a - \tfrac{1}{27}}.$$

§. 78.

Eine unbestimmte quadratische Gleichung wird auf ähnliche Art gelöset, wie die einfachen Gleichungen §. 74, indem man für eine unbekannte Größe einen Werth

annimmt, um die davon abhängige andere unbekannte Größe zu finden; z. B. man soll zwei Quadrate finden, deren Summe ein Quadrat ist, oder man soll $x^2 + y^2 = z^2$ auflösen.

Es ist $y^2 = z^2 - x^2 = (z + x)(z - x)$ (§. 12); dann $y = \sqrt{z + x \,.\, z - x}$. Gesetzt, $x = 3$, $z = 5$, also ist $y = \sqrt{5 + 3 \,.\, 5 - 3} = \sqrt{25 - 9} = 4$; also ist $5 + 3 > 4$ d. i. $z + x > y$. Daher sei $z + x = ny$, wo n eine positive ganze Zahl ausdrückt; ferner $z - x < y$; dem zufolge ist $z - x = \frac{y}{n} = m$; sohin ist $y = nm$ und $ny = n^2m$. Offenbar kann z so ausgedrückt werden, daß $z = \frac{z + x}{2} + \frac{z - x}{2}$ ist, oder $z = \frac{ny}{2} + \frac{m}{2} = \frac{n^2m}{2} + \frac{m}{2}$ $= \left(\frac{n^2 + 1}{2}\right)m$. Eben so kann x so aufgefaßt werden, daß $x = \frac{z + x}{2} - \frac{z - x}{2}$ oder $x = \frac{ny}{2} - \frac{m}{2} = \frac{n^2m}{2} - \frac{m}{2}$ $= \left(\frac{n^2 - 1}{2}\right)m$.

Der Ausdruck einer jeden geraden Zahl ist 2m und jeder ungeraden Zahl 2m + 1 (§. 19); das Product einer geraden Zahl in eine ungerade ist gerade, nämlich $2m \times 2m + 1 = 4m^2 + 2m = 2m^2 + 2m^2 + 2m$, wo alles mit 2 aufgeht. Deßwegen, um die ganzen Zahlen x und z mit 2 theilen zu können, müssen $n^2 + 1$ und $n^2 - 1$ gerade Zahlen sein, wenn m eine ungerade Zahl ist. Ist m eine gerade Zahl, so kann sowohl $n^2 + 1$ als $n^2 - 1$ gerade und ungerade sein. Darnach richtet sich offenbar der Werth von n.

Nun sei $y = mn = 1, 2, 3, 4, 5 \ldots$, dann wird

$x = 0$, $y = 1$, $z = 1$ wenn $m = n = 1$;	$x = 4$, $y = 3$, $z = 5$ wenn $n = 3$, $m = 1$
$x = 0$, $y = 2$, $z = 2$ wenn $m = 2$, $n = 1$	$x = 12$, $y = 9$, $z = 15$ wenn $m = n = 3$.

Wirklich ist auch $x^2 + y^2 = z^2$ z. B. im letzten Falle $12^2 + 9^2 = 15^2$ oder $144 + 81 = 225$.

Siebenter Abschnitt.

Proportionen und Reihen.

§. 79.

Vergleicht man zwei Größen, um zu erfahren, um wie viel die eine mehr Einheiten enthalte, als die andere; so entsteht das arithmetische Verhältniß, dessen Zeichen (∸) ist; z. B. 3 ∸ 5 heißt 3 verhält sich zu 5; 5 ist um 2 größer als 3. Der Unterschied 2 heißt Differenz, und wenn man denselben zum ersten Gliede zählt, erhält man das zweite; 3 + 2 = 5. Wenn man aber zwei Größen so vergleicht, daß man wissen will, wie oft die eine in der andern enthalten sei; so entsteht ein geometrisches Verhältniß, dessen Zeichen (:) ist, z. B. 3 : 12 heißt 3 verhält sich zu 12; 3 steckt 4mal in 12; der Quotus 4 heißt Exponent, und wenn man mit dem Exponenten das erste Glied multipliciert, ertsteht das zweite, nämlich 3 × 4 = 12. Allgemein ist, wenn a das erste Glied und d den Unterschied bedeutet, jedes arithmetische Verhältniß = a ∸ a + d = 3 ∸ 3 + 2; wenn a das erste Glied und m den Exponenten ausdrückt, ist jedes geometrische Verhältniß = a : am = 3 : 4 × 3.

§. 80.

Eine Proportion ist die Gleichheit zweier Verhältnisse; z. B.

arithmetisch: $2 \dot{-} 5 = \overset{3}{\smile} 3 \dot{-} 6$; $a \dot{-} a + d = b \dot{-} b + d$, wo $d = 3, b = 3$;

geometrisch: $3 : 12 = \overset{4}{\smile} 1 : 4$; $a : am = b : bm$, wo $m = 4, b = 1$.

Die Proportionen sind discret, wenn die mittlern Glieder (5, 3; 12, 1) verschiedene Größen sind; stetig, wenn sie die nämliche Größe sind; z. B.

arithm.: $2 \dot{-} 4 \dot{-} 6 = 2 \dot{-} 4 = 4 \dot{-} 6 = a \dot{-} a + d \dot{-} a + 2d$;

geom.: $3 : 6 : 12 = 3 : 6 = 6 : 12 = a ; am : am^2$.

Homologe (gleichnamige) Glieder sind die ersten und letzten Glieder der Verhältnisse (2, 3; 5, 6).

§. 81.

In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der äußern Glieder (des ersten und 4ten) der Summe der mittlern (oder innern) gleich; denn:

$$a \dot{-} a + d = b \dot{-} b + d \qquad 2 \dot{-} 5 = 3 \dot{-} 6$$
$$a + d + b = a + d + b; \qquad 2 + 6 = 5 + 3;$$

ferner: $a \div a + d \div a + 2d$

$$a + a + 2d = (a + d) + (a + d) = 2(a + d);$$

$$2 \div 4 \div 6$$

$$2 + 6 = 4 + 4 = 2 \times 4.$$

Wenn also die Summe zweier Zahlen der Summe zweier andern gleich ist, so bilden diese 4 Zahlen eine arithmetische Proportion; z. B. aus $a + b = c + d$ wird $a \div c = d \div b$.

Wenn die Summe zweier Zahlen dem Doppelten einer dritten gleich ist, so bildet sich eine stetige arithm. Proportion; z. B. aus $a + b = 2c$ wird $a \div c \div b$.

§. 82.

Wenn in einer arithm. Proportion ein Glied unbekannt ist, so bildet man aus derselben eine Gleichung, indem man die Summe der innern Glieder jener der äußern gleich setzt, und sucht darin x; z. B.

$$a \div b = c \div x;\ b + c = a + x;$$
$$x = b + c - a;$$
$$a \div b \div x;\ a + x = b + b = 2b;$$
$$x = 2b - a;$$
$$4 \div 5 = 6 \div x;\ x = 5 + 6 - 4 = 7;$$
$$4 \div 6 \div x;\quad x = 2 \times 6 - 4 = 8.$$

§. 83.

Hat man die arithm. Proportion: $a \div x \div b$, so ist nach dem vorigen §. $a + b = x + x = 2x$, und $x = \frac{a + b}{2}$.

Dieser Ausdruck liefert das arithmetische Mittel von a und b; z. B. welches ist das arithm. Mittel von 5 und 9? $a = 5$, $b = 9$, und $x = \frac{5 + 9}{2} = \frac{14}{2} = 7$ arithm. Mittel von 5 und 9, da $5 \div 7 \div 9$.

Ist das arithmetische Mittel mehrerer Zahlen anzugeben, so addiere man die Zahlen, und dividiere die Summe derselben mit ihrer Anzahl; z. B. welches ist das arithmethische Mittel der Zahlen 6, 7, 8, 14, 19? Antw. $\frac{6 + 7 + 8 + 14 + 19}{5} = \frac{54}{5} = 10\frac{4}{5}$ ist ihr arithmetisches Mittel.

denn $6 \div x \div 7$ | $2x = 6 + 7 = 13$
$7 \div x \div 8$ | $2x = 7 + 8 = 15$
$8 \div x \div 14$ | $2x = 8 + 14 = 22$
$14 \div x \div 19$ | $2x = 14 + 19 = 33$
$19 \div x \div 6$ | $2x = 19 + 6 = 25$

$$10x = 108;\ x = \frac{108}{10} = 10\frac{8}{10} = 10\frac{4}{5}.$$

§. 84.

In jeder geometrischen Proportion ist das Product der mittlern Glieder gleich dem Producte der äußern Glieder; denn: $a : am = b : bm$; $2 : 6 = 4 : 12$;
$abm = amb$; $2 \times 12 = 6 \times 4$;
$a : am : am^2$; $2 : 6 : 18$;
$aam^2 = am \times am$; $2 \times 18 = 6 \times 6$.

Wenn also das Product zweier Zahlen dem Producte zweier andern Zahlen gleich ist; so bilden diese 4 Zahlen eine geom. Proportion; z. B. aus $ab = cd$ wird $a : c = d : b$; aus $2 \times 6 = 1 \times 12$ wird $2 : 1 = 12 : 6$. Wenn das Product zweier Zahlen dem Quadrate einer dritten Zahl gleich ist, so bilden diese drei Zahlen eine stetige Proportion; z. B. aus $ab = c^2$ entsteht $a : c : b$; aus $2 \times 8 = 4^2$ wird $2 : 4 : 8$.

§. 85.

Wenn in einer geometrischen Proportion ein Glied unbekannt ist, so verwandle man die Proportion in eine Gleichung, indem man das Product der äußern Glieder jenem der mittlern gleich setzt, und suche darin x; z. B. $a : b = c : x$; $bc = ax$; $x = \frac{bc}{a}$; $2 : 5 = 3 : x$; $3 \times 5 = 2x$; $2x = 15$; $x = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$. Diesen Fall drückt der Vers: Duc ternum in medium, productum divide primo aus, d. h. multipliciere das zweite und dritte Glied, und dividiere dieses Product mit dem ersten Gliede; ferner $a : b : x$; $ax = b \times b = b^2$; $x = \frac{b^2}{a}$; dann $3 : 9 : x$; $3x = 9^2 = 81$, und $x = \frac{81}{3} = 27$.

§. 86.

Liegt die geometrische Proportion vor $a : x : b$; so hat man nach dem vorhergehenden §. $ab = x \times x = x^2$, und $x = \pm \sqrt{ab}$ (§. 75). Durch diese Formel wird das geometrische Mittel ausgedrückt. Welches ist

das geometrische Mittel der Zahlen 4 und 9? Antw. $x = \pm \sqrt{4 \times 9} = \pm 6$ geom. Mittel zu 4 und 9.

§. 87.

Hat man 3 Zahlen a, b, c von der Eigenschaft, daß sich die erste zur dritten geometrisch verhält, wie die Differenzen $a - b$ und $b - c$; so heißt man diese Proportion $a : c = a - b : b - c$ eine harmonische; z. B. 5, 9, 45, wo $5 : 45 = 5 - 9 : 9 - 45$ oder $5 : 45 = - 4 : - 36$. Man suche nun zu den Zahlen 6 und 9 die dritte harmonische Zahl! Es ist nun $a = 6$, $b = 9$, $x = c$; also $6 : x = 6 - 9 : 9 - x$, wo $6 \times (9 - x) = x(6 - 9)$ laut §. 84, oder: $54 - 6x = - 3x$; $54 = 6x - 3x = 3x$, und $x = c = 18$ ist die dritte harmonische Zahl zu 3 und 9; denn $6 : 18 = 6 - 9 : 9 - 18$ oder: $6 : 18 = - 3 : - 9$. Man suche zu 6 und 9 die harmonische Mittelzahl! Es ist $a = 6$, $c = 9$, $b = x$, und $6 : 9 = 6 - x : x - 9$, worin $9(6 - x) = 6(x - 9)$ laut §. 84, und $54 - 9x = 6x - 54$; $54 + 54 = 108 = 9x + 6x = 15x$; $x = \frac{108}{15} = \frac{36}{5} = 7\frac{1}{5}$ ist zu 6 und 9 das harmonische Mittel; denn $6 : 9 = 6 - 7\frac{1}{5} : 7\frac{1}{5} - 9$ oder $6 : 9 = - 1\frac{1}{5} : - 1\frac{4}{5}$.

Zwischen 4 und 9 ist $\frac{13}{2} = 6\frac{1}{2}$ das arithmetische Mittel (§. 83); zwischen 4 und 9 ist ± 6 das geometrische Mittel (§. 86), und zwischen 4 und 9 ist $5\frac{7}{13}$ das harmonische Mittel, und es hat zwischen diesen 3 Mittelzahlen von 4 und 9 ein geometrisches Verhältniß statt, nämlich es ist: $6\frac{1}{2} : 6 : 5\frac{7}{13}$.

§. 88.

Aus dem §. 84 folgen mehrere Aenderungen einer geometrischen Proportion, wobei jedes Mal das Product der äußern Glieder jenem der innern gleich bleibt; und zwar, wenn $12 : 18 = 4 : 6$ folgende:

1) alternando (Umstellung der mittl. Glieder): $12 : 4 = 18 : 6$
2) permutando (Umstell. der äußern Glieder): $6 : 18 = 4 : 12$
3) invertendo (Umkehrung der Verhältnisse): $18 : 12 = 6 : 4$
4) addendo vel subtrahendo rationes: $12 \pm 18 : 18 = 4 \pm 6 : 6$
5) „ „ „ homologos: $12 \pm 4 : 18 \pm 6 = 12 : 18 = 4 : 6$
6) multiplicando vel dividendo rationes: $24 : 36 = 4 : 6$
$12 : 18 = 8 : 12$
$6 : 9 = 4 : 6$
$12 : 18 = 2 : 3$

7) multiplicando vel dividendo homologos: $24 : 18 = 8 : 6$
$12 : 36 = 4 : 12$
$6 : 18 = 2 : 6$
$12 : 9 = 4 : 3$

8) elevando vel extrahendo: $12^n : 18^n = 4^n : 6^n$;
$\sqrt[m]{12} : \sqrt[m]{18} = \sqrt[m]{4} : \sqrt[m]{6}$.

§. 89.

Man soll eine Zahl B nach dem Verhältnisse a, b, c.... theilen; z. B. 3240 nach dem Verhältnisse 2, 3, 4.

Die Theile seien x, y, z. Es ist $x + y + z = B$ (§. 4, nro. 2); ferner $a : x = b : y$;
$b : y = c : z$;
d. h. $a : x = b : y : c : z$; und

$$a + b + c : x + y + z = \left.\begin{matrix} a : x \\ b : y \\ c : z \end{matrix}\right\} \text{§. 88, nro. 5.};$$

endlich:

$$a + b + c : B = \begin{matrix} a : x \\ b : y \\ c : z. \end{matrix}$$

Also: $2 + 3 + 4 : 3240 = 2 : x \;(= 720)$
$2 + 3 + 4 : 3240 = 3 : y \;(= 1080)$
$2 + 3 + 4 : 3240 = 4 : z \;(= 1440)$

Probe.

$720 + 1080 + 1440 = 3240$;
$2 : 3 = 720 : 1080$
$3 : 4 = 1080 : 1440$
$2 : 4 = 720 : 1440$.

Weil in dieser Aufgabe $x + y + z = B$, ferner $bx = ay$, $cy = bz$ (§. 84); so kann man x, y, z durch diese Gleichungen finden; nämlich $x = B - y - z$;

$$x = \frac{ay}{b};\; z = \frac{cy}{b};\; \text{also } \frac{ay}{b} = B - y - \frac{cy}{b};$$

$$B = \frac{ay}{b} + y + \frac{cy}{b} = \frac{ay}{b} + \frac{by}{b} + \frac{cy}{b}$$

$$= y\left(\frac{a + b + c}{b}\right);\; y = B\left(\frac{b}{a + b + c}\right) = \frac{Bb}{a + b + c};$$

$$x = \frac{a}{b} \cdot \frac{Bb}{a + b + c} = \frac{aB}{a + b + c}, \text{ und } z = \frac{c}{b} \cdot \frac{Bb}{a + b + c}$$

$$= \frac{Bc}{a + b + c}, \text{ wie vorhin.}$$

§. 90.

Wenn in zwei Proportionen zwei gemeinschaftliche Glieder sind, so stehen die übrigen in einer Proportion, und zwar

a) ex aequo simpliciter, d. h. zwei Proportionen, die einer dritten gleich sind, sind einander gleich (§. 4, nro. 3) d. i.

wenn $a : b = c : d$
und $a : b = m : n$

so $c : d = m : n$;

b) ordinatim et ex aequo, wenn die gemeinschaftlichen Glieder homologe sind; z. B.

wenn $a : b = c : d$
$a : m = c : n$

so ist $b : d = m : n$,

weil $a : c = b : d$
und $a : c = m : n$; §. 88, nro. 1;

c) perturbate et ex aequo, wenn die gemeinschaftlichen Glieder innere oder äußere sind; z. B.

wenn $a : b = c : d$
$a : m = n : d$

so $b : m = n : c$,

weil $ad = bc$,
und $ad = mn$ (§. 84)

also $bc = mn$, woraus $b : m = n : c$ (§. 84).

§. 91.

Aus §. 84 folgt endlich, daß, wenn man zweier Proportionen Glieder der Ordnung nach mit einander multipliciert oder dividiert, neue Proportionen erscheinen; z. B.

$$\begin{array}{r|l} 2 : 4 = 8 : 16 & 2 : 4 = 8 : 16 \\ \times)\ 1 : 2 = 4 : 8 & :)\ 1 : 2 = 4 : 8 \\ \hline 2 : 8 = 32 : 128 & 2 : 2 = 2 : 2 \end{array}$$

(identische Proportion).

Multipliciert man dergestalt 2 Proportionen, worin 2 gleiche Glieder sind, gliederweise; so heißt die entstandene Proportion proportio duplicata, und wenn man überall die □ Wurzel auszieht, proportio subduplicata; z. B.

$$\begin{array}{l} a : b = c : d \\ \times\ a : b = m : n \\ \hline a^2 : b^2 = cm : dn, \text{ proportio duplicata;} \\ a : b = \sqrt{cm} : \sqrt{dn} \quad » \quad \text{subdupl.} \end{array}$$

Multipliciert man 3 Proportionen, worin 3 gleiche Glieder sind, der Ordnung nach; so heißt die entstandene Pro-

portion proportio triplicata, und wenn man durchaus die $\sqrt[3]{\ }$ Wurzel auszieht, proportio subtriplicata; z. B.

$$\begin{array}{l} a : b = m : n \\ a : b = c : d \\ a : b = e : f \\ \hline a^3 : b^3 = mce : ndf \quad \text{(triplicata)} \\ a : b = \sqrt[3]{mce} : \sqrt[3]{ndf} \quad \text{(subtriplicata).} \end{array}$$

§. 92.

1. Beispiel.

In einem Garten sind 144 Bäume, theils Aepfel-, theils Birnbäume. Die Apfelbäume verhalten sich zu den Birnbäumen wie 3 : 5. Wie viele Bäume jeder Sorte waren es? Es waren x Aepfel- und y Birnbäume. Also $x + y = 144$; $3 : 5 = x : y$; $5x = 3y$; $x = \frac{3y}{5}$; $\frac{3y}{5} + y = 144$; $3y + 5y = 720$; $8y = 720$; $y = 90$ Birnbäume, somit $x = 54$ Aepfelbäume.

2. Beispiel.

Man theile 40 nach dem Verhältnisse 2, 5, 8 aus!

3. Beispiel.

Jemand hat 40 fl. Jahreslohn und ein Kleid. Nach einem Vierteljahre verläßt derselbe den Dienst, und erhält gegen 5 fl. Rückgabe das Kleidungsstück als Gebühr. Was war das Kleid werth?

Antw. x fl.; nun ist 1 Jahr : $\frac{1}{4}$ Jahr $= 40 + x : x - 5$; wie ist nun $x = 20$ fl.?

4. Beispiel.

Die Räume freifallender Körper verhalten sich wie die Quadrate der Fallzeiten oder $s : S = t^2 : T^2$. Nun ist ein Stein in 4 Secunden von der Spitze eines Thurmes zur Erde gefallen. Wie hoch war der Thurm? $t = 1$, $s = 15$ Fuß; d. h. in der ersten Sec. fällt der Stein 15 Fuß weit herab (dann in jeder nächsten Sec. um 30 Fuß weiter); man sucht S, da $T = 4$; es wird $15 : S = 1^2 : 4^2$; $S = 15 \times 16 = 240$ Fuß.

Probe:

Es ist $15 : 240 = 1^2 : x^2$ oder: $1 : 16 = 1^2 : x^2$; $x = 4$ Secunden. Eben so verhalten sich die Schwingungszeiten

bei Pendeln, wie die □Wurzeln ihrer Längen oder $t : T = \sqrt{l} : \sqrt{L}$.

5. Beispiel.

Nach Keplers Entdeckung verhalten sich die Quadrate der Umlaufszeiten der Planeten um die Sonne, wie die Kuben ihrer Abstände von derselben. Wenn nun die Erde 20.000.000 d. M. von der Sonne entfernt ist, und Jupiter 104.000.000 d. M.; in wievielen Erdjahren vollendet Jupiter seine Laufbahn um die Sonne? In x irdischen Jahren; also

$$1^2 : x^2 = 20.000.000^3 : 104.000.000^3.$$

Zur Uebung suche man nun x!

§. 93.

Arithmetische Reihen und Polygonalzahlen.

Unter Reihe versteht man eine Menge Größen, die nach einem Gesetze fortlaufen (§. 14). Die Reihen sind arithmetisch, wenn der Unterschied der Glieder durch Abziehung, geometrisch, wenn er durch Division erkannt wird; z. B.

arithm. Reihen:
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 ....
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23 ....
2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24 ....

geom. Reihen:
1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 ....
$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}$ ....

Ferner sind die Reihen abnehmend (convergentes), wenn die Glieder immer kleiner werden; z. B. obige Reihe von Brüchen; zunehmend (divergentes), wenn die Glieder größer werden; dann ist eine Reihe endlich, wenn sie eine bestimmte Anzahl Glieder hat; unendlich, wenn die Anzahl der Glieder in das Unendlichgroße fortgeht.

§. 94.

Wenn a das erste, u das letzte Glied, d den Unterschied (differentia) und n die Gliederzahl einer arithmetischen Reihe ausdrückt, so ist jede solche Reihe unter der Formel begriffen:

$a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, a + 5d, a + 6d \ldots\ldots a + (n - 1)d$; denn es verhält sich $a \div a + d \div a + 2d$; $a + d \div a + 2d \div a + 3d$; $a + 2d \div a + 3d \div a + 4d$ u. s. f., und d ist der beständige Unterschied zweier Glieder. Daher ist jedes Glied (§. 14), also auch $u = a + (n - 1)d$, weil z. B. im vierten Gliede drei der Coefficient von d ist.

§. 95.

Die Summe eines jeden Paares von Gliedern, die vom ersten und letzten Gliede gleichweit abstehen, ist der Summe des ersten und letzten Gliedes gleich; denn $a + u$ oder:
$a + a + (n - 1)d = a + d + a + (n - 2)d =$
$a + 2d + a + (n - 3)d$ u. s. f., indem z. B.
$a + a + nd - d = a + d + a + nd - 2d$;
in Zahlen: 1, 3, 5, 7, 9, 11, wo $a = 1$, $d = 2$, $u = 11$, ist
$1 + 11 = 3 + 9 = 5 + 7$.

§. 96.

Das mittlere Glied m einer arithmetischen Reihe von ungerader Anzahl der Glieder $= \frac{a + u}{2}$; denn jedes Glied ist $a + (n - 1)d$ (§. 94). Setzt man nun statt $n - 1$ die Größe $\frac{n - 1}{2}$, weil dem mittlern Gliede soviele Glieder vorangehen, als dieser Ausdruck bedeutet; so ist $m = a + \frac{n - 1}{2} \times d = \frac{2a + (n - 1)d}{2} = \frac{a + u}{2}$ (§. 95).
In 1, 2, 3, 4, 5 ist $3 = \frac{1 + 5}{2}$.

§. 97.

Die Summe einer arithm. Reihe wird nun so gefunden: 1) ist die Gliederanzahl gerade, so gibt es so viele Paare vom ersten und letzten Gliede gleich weit abstehender Glieder, als $\frac{n}{2} - 1$ ausdrückt. Mithin ist, da jedes solches Paar $= a + u$ (§. 95), deren Werth $= \left(\frac{n}{2} - 1\right)(a + u) = \frac{an}{2} - a + \frac{un}{2} - u$; hiezu noch die Summe des ersten und letzten Paares, oder $a + u$, gezählt, erhält man die Summe $S = \frac{an}{2} - a + \frac{un}{2} - u + a + u = \frac{an}{2} + \frac{un}{2} = (a + u)\frac{n}{2}$. Wenn aber 2) die Gliederanzahl ungerade ist; so nehme man die Summe der geraden Anzahl der Glieder (ohne das mittlere) d. i. von $(n - 1)$ Gliedern, und addiere das mittlere $= \frac{a + u}{2}$; man setze

sohin $(a + u)\left(\frac{n-1}{2} - 1\right)$ als Paare der abstehenden, dann $a + u$ als das Paar des ersten und letzten Gliedes, endlich $\frac{a+u}{2}$ als mittleres Glied; d. h. es wird die Reihensumme $S = (a + u)\left(\frac{n-1}{2} - 1\right) + a + u + \frac{a+u}{2} = \frac{an}{2} + \frac{un}{2} - \frac{a}{2} - \frac{u}{2} - a - u + a + u + \frac{a}{2} + \frac{u}{2} = \frac{an}{2} + \frac{un}{2} = (a + u)\frac{n}{2}$. Die Summe von 2, 4, 6, 8, 10, wo $n = 5$, $a = 2$, $u = 10$, ist $= (2 + 10) \times \frac{5}{2} = 30$; die Summe von 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, wo $a = 1$, $u = 8$, $n = 8$, ist $= (1 + 8) \times \frac{8}{2} = 36$.

§. 98.

1. Beispiel.

Wie groß ist die Summe von n ungeraden Zahlen? Bei ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 .... ist $a = 1$, $d = 2$; $u = 1 + (n - 1) \times 2$; also $S = (1 + 1 + (n - 1) \times 2)\frac{n}{2} = (2 + 2n - 2)\frac{n}{2} = 2n \times \frac{n}{2} = n^2$. Die Summe der ersten 4 ungeraden Zahlen ist $4^2 = 16 = 1 + 3 + 5 + 7$.

2. Beispiel.

Wie groß ist die Summe von n geraden Zahlen? Bei den geraden Zahlen 2, 4, 6, 8 ... ist $a = 2 = d$, $u = 2 + (n - 1) \times 2$, und $S = (2 + 2 + (n - 1) \times 2)\frac{n}{2} = (4 + 2n - 2)\frac{n}{2} = (2n + 2)\frac{n}{2} = (n + 1)n = n^2 + n$ (Pronikzahl, §. 76, 1. Beisp.). Die Summe der ersten 4 geraden Zahlen ist $4^2 + 4 = 20 = 2 + 4 + 6 + 8$.

Somit läßt sich aus der Summe der geraden Zahlen ihre Anzahl finden, eben so die Anzahl der ungeraden aus ihrer Summe; z. B. die Summe einiger geraden Zahlen ist 20, wie viele sind ihrer? Man setze $n^2 + n = 20$, $n = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 20} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{9}{2} = 4$ (§. 75). Die Summe einiger ungeraden Zahlen ist 16, wieviele sind deren? Man setze $n^2 = 16$; $n = 4$ (§. 75).

3. Beispiel.

Wie groß ist die Summe der Reihe von 1 bis 1000? Es ist $a = 1$, $u = 1000$, $n = 1000$, und $S = (1 + 1000)\frac{1000}{2}$ $= 1001 \times 500 = 500500$.

4. Beispiel.

Bei Anlegung einer Pflanzung standen in der ersten Linie 8, in der letzten Linie 43 Bäume, und jede folgende Linie enthielt um 1 Baum mehr, als die vorhergehende. Wie viele Linien zählte man, und wie viele Bäume waren da?

$$u = a + (n - 1)d;$$
$$43 = 8 + (n - 1) \times 1 = 8 + n - 1 = 7 + n;$$
$$43 - 7 = n = 36 \text{ Linien Bäume};$$
$$S = (a + u)\frac{n}{2} = (8 + 43) \times \tfrac{36}{2} = 51 \times 18$$
$$= 918 \text{ Bäume}.$$

5. Beispiel.

Das letzte Glied einer arithm. Reihe $= 55$, das erste $= 1$, die Anzahl der Glieder $= 55$, welches ist der Unterschied?

$$u = a + (n - 1)d;$$
$$55 = 1 + (55 - 1)d$$
$$55 = 1 + 55d - d$$
$$55 - 1 = 54d$$
$$\frac{54}{54} = 1 = d.$$

Aus der Formel $u = a + (n - 1)d$ (§. 94) fließen nach der Lehre der Gleichungen folgende Formeln:

1) $a = u - (n - 1)d = u - nd + d$

2) $n = \frac{-a + u + d}{d} = \frac{u - a + d}{d} = \frac{u - a}{d} + 1$

3) $\frac{u - a}{n - 1} = d.$

Aus der Formel $S = (a + u)\frac{n}{2}$ (§. 97) ergibt sich:

4) $\frac{2S}{n} - a = u$

5) $\frac{2S}{n} - u = a$

6) $\frac{2S}{a + u} = n.$

Aus der Vergleichung von Nro. 1 und Nro. 5 zeigt sich

$$u - dn + d = \frac{2S}{n} - u$$

$$2u = \frac{2S}{n} + dn - d.$$

7) $u = \frac{S}{n} + \tfrac{1}{2}dn - \tfrac{1}{2}d = \frac{S}{n} + \tfrac{1}{2}d(n - 1);$

$$\frac{u - \frac{S}{n}}{n - 1} = \tfrac{1}{2}d;\ d = \frac{2u - \frac{2S}{n}}{n - 1}$$

8) $d = \frac{2u}{n - 1} - \frac{2S}{n^2 - n} = \frac{2un - 2S}{n^2 - n} = \frac{2(un - S)}{n \cdot \overline{n - 1}}.$

9) $\frac{2nu - dn^2 + dn}{2} = S = \frac{n}{2}(2u - dn + d).$

10) $n(2u + d) - dn^2 = 2S$

$$n = \frac{2u + d}{2d} \pm \sqrt{\left(\frac{2u + d}{2d}\right)^2 - \frac{2S}{d}}.$$

Aus der Vergleichung nro. 2 und nro. 6 entsteht:

$$\frac{u + a}{d} \times 1 = \frac{2S}{a + u}$$

$$\frac{au + u^2 - a^2 - au}{d} + a + u = 2S$$

11) $S = \frac{au + u^2 - a^2 - au}{2d} + \frac{a + u}{2} =$

$$\frac{a + u}{2} + \frac{\overline{u + a} \cdot \overline{u + a}}{2d}.$$

12) $u^2 - a^2 + d(a + u) = 2dS$

$$d = \frac{\overline{u - a} \cdot \overline{u + a}}{2S - (a + u)}.$$

13) $u - a + d = \frac{2dS}{a + u}$

$$u^2 - a^2 + ad + du = 2dS$$

$$u = -\tfrac{1}{2}d \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}d^2 + 2dS + a^2 - ad},$$ und

14) $a = \tfrac{1}{2}d \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}d^2 - 2dS + u^2 + du}$

Aus der Zusammenstellung von nro. 4 und $a + dn - d$ (nro. 1) ergibt sich:

$$\frac{2S}{n} - a = a + dn - d$$

15) $2S - an = an + dn^2 - dn$

$$S = an + \frac{dn^2}{2} - \frac{dn}{2} = an + \tfrac{1}{2}dn(n - 1).$$

16) $$\frac{\frac{2S}{n} - 2a}{n - 1} = d = \frac{2(S - an)}{n \,.\, n - 1}.$$

17) $$a = \frac{S}{n} + \frac{d}{2} - \frac{dn}{2} = \frac{S}{n} - \tfrac{1}{2}d(n - 1).$$

18) $2S - an = an + dn^2 - dn$

$$n = \frac{1}{2} - \frac{a}{d} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{a}{d} + \frac{a^2}{d^2} + \frac{2S}{d}}.$$

Es sind also mit den 2 Grundformeln 20 Formeln.

§. 99.

Wenn man die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 .... addiert, nämlich von vorn zu je 1, je 2, je 3 rc. Gliedern, so erhält man die Dreieckszahlen (Trigonalzahlen) = 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45. Hier bedeutet a = 1 (erstes Glied), d = 2 (erster Unterschied), δ = 1 (zweiter Unterschied); d. i.

a = 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28 .....
d = 2, 3, 4, 5, 6, 7
δ = 1, 1, 1, 1, 1.

Wenn man die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ..... der Ordnung nach jede quadriert, so erhält man die Viereckszahlen (Tetragonalzahlen) = $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2$ = 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 .... Hier ist a = 1, d = 3, δ = 2; denn a = 1, 4, 9, 16 ...
d = 3, 5
δ = 2.

Diese Tetragonalzahlen hätte man auch erhalten, wenn man die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, 9 ... addiert hätte; nämlich 1, 1 + 3, 1 + 3 + 5, 1 + 3 + 5 + 7, 1 + 3 + 5 + 7 + 9 .... Hätte man so die geraden Zahlen 2, 4, 6, 8, 10 .... zusammengezählt, würde man die Pronikzahlen 2, 6, 12, 20, 30, 42 .... erhalten haben. Diese bisher angeführten Zahlen heißt man Polygonal- oder Viereckszahlen, weil sie sich auf Dreiecke, Vierecke rc. beziehen.

§. 100.

Die allgemeine Formel, die Bezeichnung, dieser Zahlen ist: a, $a+d$, $a+2d+\delta$, $a+3d+3\delta$, $a+4d+6\delta$......

$a+(n-1)d+\frac{n^2-3n+2}{2}\delta$, wenn n die Gliederanzahl heißt; denn bei dem Trigonalprogreß hat man offenbar:

$1, 1+2, 1+2\times 2+1, 1+3\times 2+3\times 1, 1+4\times 2+6\times 1\ldots$
$=1, \quad 3, \quad 6, \quad 10, \quad 15\ldots\ldots;$

ferner gehen die Coefficienten von d wie jene in §. 94; mithin ist der Coefficient von d im n^{ten} Gliede $n-1$. Die Coefficienten von δ sind nacheinander $0, 0, 1, 1+2, 1+2+3$ oder $0, 0, 1, 3, 6$; also im n^{ten} Gliede, wo man $n=n-2$ setzen muß, da die Coefficienten von δ erst beim 3ten Gliede anfangen, ist der Coefficient von $\delta = 1, 2, 3, 4, 5, 6\ldots\ldots$

$$n-2=(1+n-2)\frac{n-2}{2}\ (\text{§. } 97)=n-1\times\frac{n-2}{2}$$

$$=\frac{n^2-2n-n+2}{2}=\frac{n^2-3n+2}{2}.$$

Das allgemeine Glied $a+(n-1)d+\frac{n^2-3n+2}{2}\delta$

$=a+nd-d+\frac{n^2\delta}{2}-\frac{3\delta n}{2}+\frac{2\delta}{2}$. Ordnet man dieses Product nach n, so ist das allgemeine Glied $=$ $\frac{\delta}{2}n^2+\left(d-\frac{3\delta}{2}\right)n+a-d+\delta$. Z. B. Wie lautet die 5te Pronikzahl?

Bei den Pronikzahlen (§. 99) ist $a=2$, $d=4$, $\delta=2$, und hier $n=5$; also ist die 5te Pronikzahl $=$ $\frac{2}{2}\cdot 5^2+\left(4-\frac{3\cdot 2}{2}\right)\cdot 5+2-4+2=25+5+0=30$.

Zur Uebung! Wie lautet die 16te Trigonalzahl? Ferner: Eine Pronikzahl ist 42. Die wievielte ist sie? Man setze $42=\frac{2}{2}\times n^2+\left(4-\frac{3\cdot 2}{2}\right)n+2-4+2$ oder $42=n^2+n$; man suche n nach §. 75.

§. 101.

Um die Summe der Polygonalzahlen zu finden, multipliciere man n^2 mit nx, n mit ny, und n^0 mit nz. Man erhält xn^3, yn^2, zn. Setzt man $n=1, 2, 3$; wird

A) $x + y + z = a$, B) $8x + 4y + 2z = a + d$, und C) $27x + 9y + 3z = a + 2d + \delta$. Nun ziehe man 2A von B ab; es bleibt D) $6x + 2y = d$; dann ziehe man 3A von C ab; es bleibt E) $24x + 6y = 2d + \delta$; jetzt subtrahiere man 2D von E; es bleibt F) $12x + 2y = \delta + d$; endlich subtrahire man D von F; der Rest oder $6x = \delta$, und $x = \frac{\delta}{6}$; sonach ist $y = \frac{\delta + d - 2\delta}{2}$ (lit. F) $= \frac{d - \delta}{2}$, und $z = a - \frac{d - \delta}{2} - \frac{\delta}{6}$ (lit. A) $= a - \frac{d}{2} + \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{6} = a - \frac{d}{2} + \frac{1}{3}\delta = \frac{6a - 3d + 2\delta}{6}$.

Mithin ist die Summe $S = xn^3 + yn^2 + zn = \frac{\delta}{6}n^3 + \frac{d - \delta}{2}n^2 + \frac{6a - 3d + 2\delta}{6}n$. Z. B. ein Kugelhaufen bildet eine dreieckige Pyramide. Die oberste Kugel wird von 3 Kugeln gehalten, diese 3 werden von 6 Kugeln gehalten, diese wieder von 10 Kugeln u. s. f. gestützt. Wenn nun 30 Schichten vorhanden sind, wieviele Kugeln liegen auf dem Boden oder zu unterst, und wieviele Kugeln sind es im Ganzen? $n = 30$, $a = 1 = \delta$, $d = 2$; mithin liegen zu unterst (§. 100) $= \frac{1}{2} \times 900 + (\frac{1}{2})30 + 0 = 450 + 15 = 465$ Kugeln. Im Ganzen sind es oder es ist $S = \frac{1}{6} \cdot 27000 + \frac{1}{2} \cdot 900 + \frac{1}{3} \cdot 30 = \frac{1}{6}(27000 + 3 \cdot 900 + 2 \cdot 30) = \frac{1}{6}(27000 + 2700 + 60) = \frac{1}{6}(29760) = 4960$ Kugeln.

Zur Uebung! Wie groß ist die Summe der Quadrate aller Zahlen von 1, 2, 3, 4, 5 . . . . . bis 100?

§. 102.

Geometrische Reihen.

Bezeichnet a das erste Glied, u das letzte Glied, m den Exponenten und n die Anzahl der Glieder einer geometrischen Reihe; so ist eine geometrische Reihe in der Formel enthalten:

$a, ma, m^2a, m^3a, m^4a, m^5a \ldots\ldots\ldots m^{n-1}a$; denn der durchlaufende Exponent der Reihe ist offenbar m, und es verhält sich $a : ma : m^2a$; $ma : m^2a : m^3a$; $m^2a : m^3a$

$: m^4 a$ u. s. f. Daher ist jedes Glied, also auch $u = m^{n-1}a$, da z. B. der Exponent des 4ten Gliedes = 3.

§. 103.

Setzt man in voriger Progression $a = 1$ und $m = 10$, so hat man die Progression 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000 ..... $= 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ ..... Die Exponenten 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6... nennt man die Logarithmen (λόγος, ἀριθμός, λογαριθμός, Verhältnißzeiger) der Zahlen 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 rc., so daß, da $10^6 = 1000000$, der Exponent 6 der Logarithme zu 1000000 ist, weil von 1 bis 1000000 sechs geometrische Verhältnisse sind, als: 1 : 10; 10 : 100; 100 : 1000; 1000 : 10000; 10000 : 100000; 100000 : 1000000. Solche über die Grundzahl oder Base 10 gesetzte Exponenten heißt man die briggischen Logarithmen der Zahlen 1, 10, 100, 1000.... von ihrem Erfinder Heinrich Brigg, Prof. zu Oxford. Also $10^0 = 1$; $0 = \text{Log.}\,1$; $10^1 = 10$; $1 = \text{Log.}\,10$; $10^2 = 100$; $2 = \text{Log.}\,100$ u. s. w. Der Logarithme von 1 ist also $= 0$, und der Logarithme der Grundzahl $= 1$. Da $10^{-\infty} = \frac{1}{10^\infty}$ (§. 11) $= 0$; so ist $-\infty = \text{Log.}\,0$.

Die Logarithmen von $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{10}$ sind $= -4, -3, -2, -1$, weil z. B. $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000}$, und $-4 = \text{Log.}\,\frac{1}{10000}$ rc. Logarithmen einer negativen Zahl sind undenkbar, unmöglich eingebildet (§. 45) weil 10^m nie einen negativen Werth bekommt, m mag wie immer als ganze Zahl angenommen werden. Jeder briggische Logarithme besteht aus zwei Theilen, aus der Kennziffer (Charakteristik) und aus der Zugabe (mantissa); z. B. $10^{2,0000000} = 100$; $\text{Log.}\,100 = 2{,}0000000$; hier ist 2 die Kennziffer, und zeigt an, daß die erzeugte Zahl 100 drei (2 + 1) Ziffern habe; 0000000 ist die Mantisse; ferner $10^{3,30103} = 2000$; $3{,}30103 = \text{Log.}\,2000$; 3 ist Charakteristik (2000 hat 3 + 1 Ziffer), 30103 ist Zugabe, weil 10^3 nur nur 1000 erzeugt; $10^{0,30103} = 2$; 0 ist Charakteristik (2 hat 0 + 1 Ziffer), 30103 ist wieder die Mantisse.

§. 104.

Die Summe S einer geometrischen Reihe wird so gefunden:

$$S = a + ma + m^2a + m^3a + m^4a + m^5a \ldots\ldots m^{n-1}a \text{ (§. 102)};$$
$$m = m$$
$$\times \quad \times$$

$$mS = ma + m^2a + m^3a + m^4a + m^5a + m^6a \ldots\ldots m^na;$$
$$S = a + ma + m^2a + m^3a + m^4a + m^5a \ldots\ldots m^{n-1}a;$$
$$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$

$mS - S = -a + m^na$; $(m-1)S = m^na - a$, und

$$S = \frac{m^na - a}{m-1} = \frac{(m^n - 1)a}{m-1}.$$

§. 105.

1. Beispiel.

Dem Perser Sessa, Erfinder des Schaches, wurde die Bitte bewilliget, daß man ihm zur Belohnung für das erste der 64 Felder 1 Weizenkörnlein, für das zweite 2, für das dritte 4, für das vierte 8, und so immer für das folgende Feld das Doppelte des vorhergehenden geben wolle. Wie viele Körnchen hätte er bekommen sollen?

Es ist $a = 1$, $m = 2$, $n = 64$; $S = \frac{(2^{64} - 1)}{2 - 1} \times 1$

$= 2^{64} - 1$ Körnchen $=$ 18'''446.744''073.709'551.615 Körnchen, die man demselben erst in 7709 Jahren hätte bezahlen können, wenn man ihm täglich 1'000.000 Schäffel entrichtet hätte; denn nach Magold hat man:

? Körnchen	1 Schäffel
Schfl. 1	6 bayer. Metzen
Metz. 1	$49\frac{31}{64}$ ℔.
℔. $\frac{1}{8}$	2760 Körner
	6'555.690 Körnchen = 1 b. Schfl.

ferner geben nun die bewilligten Körnlein

$$\frac{18446744073709551615}{: 6555690} = 2''813.855'455.903 \text{ b. Schfl.};$$

endlich $\frac{2813855455903}{365 \times 1000000} = 7709$ Jahre.

2. Beispiel.

Wie groß ist die Summe von $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$?

Es ist $n = 4$, $m = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{2}$, $S = \frac{(\frac{1}{2}^4 - 1)\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1}$

$$= \frac{(\frac{1}{64} - 1)\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{63}{64} \cdot \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = (\tfrac{63}{64} \times -\tfrac{1}{2}) : -\tfrac{1}{2} = \tfrac{63}{64}.$$

Da $u = m^{n-1}a$ (§. 102), so ist $\frac{u}{a} = m^{n-1}$, und $\frac{mu}{a}$ $= m^n$; folglich $S = \frac{(m^n - 1)a}{m - 1} = \frac{\left(\frac{mu}{a} - 1\right)a}{m - 1} = \frac{um - a}{m - 1}$.

3. Beispiel.

Man summier $\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{y^3}{x^3} + \frac{y^4}{x^4} \ldots\ldots$ Hier ist $a = \frac{y}{x}$, $m = \frac{y}{x}$, $n = \infty$; mithin $S = \frac{(m^n - 1)a}{m - 1} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^{\infty} a - a}{\frac{y}{x} - 1}$;

wenn $x > y$, so ist $\left(\frac{y}{x}\right)^{\infty} a$ unendlich klein, und $S =$

$$\frac{-a}{\frac{y}{x} - 1} = \frac{-\frac{y}{x}}{\frac{y-x}{x}} = \frac{\frac{-xy}{x}}{y - x} = \frac{-y}{y - x} = \frac{y}{x - y};$$ z. B.

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \ldots\ldots = \frac{1}{2-1} = 1$, weil $x = 2$, $y = 1$ ist.

Eben so ist $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000} \ldots\ldots = \frac{1}{10 - 1}$ $= \frac{1}{9} = 0{,}11111 \ldots\ldots$

Dann ist $\frac{296}{1000} + \frac{296}{1000000} + \frac{296}{1000000000} \ldots\ldots =$ $\frac{296}{999} \overset{37}{=} \frac{8}{27} = 0{,}296296296 \ldots\ldots$ (§. 34). Gleichmäßig ist $0{,}41666 \ldots\ldots = \frac{41}{100} + \frac{6}{1000} + \frac{6}{10000} + \frac{6}{100000} \ldots\ldots =$ $\frac{41}{100} + \frac{6}{900} = \frac{369}{900} + \frac{6}{900} = \frac{375}{900} \overset{75}{=} \frac{5}{12}$ (§. 34). In diesen letzten zwei Fällen aber ist einmal $\frac{y}{x} = \frac{1}{1000} = m$, und

dann ist $\frac{y}{x} = \frac{1}{10} = m$; $a = \frac{296}{1000}$ und nachher $a = \frac{6}{1000}$.

4. Beispiel.

Man summiere $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} \ldots\ldots$

Das ist: $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$; $\frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$; $\frac{1}{32} - \frac{1}{64} = \frac{1}{64}$;

deßwegen ist $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} \ldots = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} \ldots$,

wo $y = 1$, $x = 4$, und $S = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3}$.

Aus der Formel $u = am^{n-1}$ findet man mittelst Anwendung der Lehre von den Gleichungen:

1) $a = \frac{u}{m^{n-1}}$

2) $\frac{u}{a} = m^{n-1}$

$\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}} = m$

3) $L.\, u = L.\, am^{n-1} = (n-1)\, L.\, m + L.\, a$
$n\, L.\, m - L.\, m + L.\, a$;
$L.\, u - L.\, a + L.\, m = n\, L.\, m$
$n = \frac{L.\, u - L.\, a + L.\, m}{L.\, m} = \frac{L.\, u - L.\, a}{L.\, m} + 1.$

Aus der Formel $S = \frac{um - a}{m - 1}$ erhält man

4) $\frac{mS - S + a}{m} = u = \frac{a + (m-1)S}{m}$

5) $(m - 1)\, S - um = -a$
$a = um - (m-1)S$

6) $mS - S - um = -a$
$m = \frac{S - a}{S - u}.$

Man vergleiche Nro. 4 und $u = am^{n-1}$ (nro. 1);

also $\frac{mS + a - S}{m} = am^{n-1}$;

$(m - 1)S + a = am^n$

7) $S = \frac{am^n - a}{m - 1} = \frac{a(m^n - 1)}{m - 1}$

8) $a = \frac{(m-1)S}{m^n - 1}$;

9) $am^n - mS + S - a = 0$;

$m^n - \frac{S}{a} m + \frac{S-a}{a} = 0$;

10) $m^n = \frac{(m-1)S}{a} + 1$

$n\,L.\,m = L.\left(\frac{m-1\,.\,S}{a} + 1\right)$

$n = L.\left(\frac{m-1\,.\,S}{a} + 1\right) : L.\,m.$

Vergleicht man $a = \frac{u}{m^{n-1}}$ (nro. 1) mit nro. 5, so erhält man $um + S - mS = \frac{u}{m^{n-1}}$, wo

11) $S = \left(\frac{u}{m^{n-1}} - um\right) : (1 - m)$

$S = \frac{u - um^n}{m^{n-1}(1-m)} = \frac{u(1-m^n)}{(1-m)\,m^{n-1}}$

12) $u = \frac{(1-m)\,m^{n-1}S}{1-m^n}$;

$u - um^n - m^{n-1}S + m^nS = 0$

$u - Sm^{n-1} + (S-u)\,m^n = 0$

13) $m^n - \frac{S}{S-u}\,m^{n-1} + \frac{u}{S-u} = 0$;

$m^{n-1}(um + S - mS) = u$

$m^{n-1} = \frac{u}{um + S - mS}$

$(n-1)\,L.\,m = L.\,\frac{u}{um + S - mS}$

14) $n = \left(L.\,m + L.\,\frac{u}{um + S - mS}\right) : L.\,m.$

Stellt man nro. 6 mit nro. 2 zusammen, so ist

$$\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}} = \frac{S-a}{S-u} = \frac{\sqrt[n-1]{u}}{\sqrt[n-1]{a}} = \frac{S-a}{S-u};$$

$$S\sqrt[n-1]{u} - u\sqrt[n-1]{u} = S\sqrt[n-1]{a} - a\sqrt[n-1]{a}$$

15) $S = \dfrac{u\sqrt[n-1]{u} - a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{u} - a\sqrt[n-1]{a}}$;

$\sqrt[n-1]{u}(S - u) = \sqrt[n-1]{a}(S - a)$; oder:

$u(S - u)^{n-1} = a(S - a)^{n-1}$, und

16) $u(S - u)^{n-1} - a(S - a)^{n-1} = 0$; ferner

17) $a(S - a)^{n-1} - u(S - u)^{n-1} = 0$; weil endlich

18) $L.\ \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}} = L.\ \left(\frac{S - a}{S - u}\right)$; so ist

$$L.\ \frac{u}{a} : (n - 1) = L.\ (S - a) - L.\ (S - u)$$

$$n - 1 = L.\ \frac{u}{a} : L.\ \frac{S - a}{S - u};$$

$$n = 1 + L.\ \frac{u}{a} : L.\ \frac{S - a}{S - u}.$$

Es sind also mit den zwei Grundformeln 20 Formeln.

Achter Abschnitt.

Logarithmen.

§. 106.

Die Begriffe sieh §. 103. Der Logarithme eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen der Factoren; nämlich $L.\ mn = L.\ m + L.\ n$; denn b sei Basis (§. 103); es ist $b^x = m$, $x = L.\ m$ §. 103); $b^y = n$; $y = L.\ n$; multipliciert man $b^x \times b^y = mn$; so hat man $b^{x+y} = mn$, wo $x + y = L.\ mn$ (§. 103), und nach der Werthsetzung erscheint $L.\ m + L.\ n = L.\ mn$. Z. B. $L.\ 100 \times 1000 = L.\ 100 + L.\ 1000 = 2 + 3 = 5$ (§. 103.).

§. 107.

Wenn man den Logarithmus eines Quotus oder Bruches verlangt; so erhält man denselben, wenn man vom Logarithmen des Zählers jenen des Nenners abzieht; d. h. $L.\ \frac{m}{n} = L.\ m - L.\ n$; denn:

$b^x = m$	$x = L.\, m$
$b^y = n$	$y = L.\, n$
$b^x : b^y = \frac{m}{n};$	
$b^{x-y} = \frac{m}{n}$	$x - y = L.\, \frac{m}{n};$
	$L.\, m - L.\, n = L.\, \frac{m}{n}.$

z. B. $L.\, \frac{1000}{10} = L.\, 1000 - L.\, 10 = 3 - 1 = 2.$

Wenn aber $n > m$; so erhält man $L.\, \frac{m}{n} = -(L.\, n - L.\, m)$ $= -L.\, \frac{n}{m}$; z. B. $L.\, \frac{1}{100} = -(L.\, 100 - L.\, 1) = -L.\, \frac{100}{1}$ $= -L.\, 100 = -2$ (§. 103).

§. 108.

Der Logarithme einer Potenz wird erhalten, wenn man mit dem Exponenten den Logarithmus der Zahl multipliciert; nämlich: $Log.\, a^n = n\, Log.\, a$; denn:

$b^x = a$	$x = L.\, a$
$b^{nx} = a^n$	$nx = L.\, a^n;$
	$n\, Log.\, a = L.\, a^n.$

z. B. $Log.\, 10^{10} = 10\, L.\, 10 = 10 \times 1 = 10.$

§. 109.

Den Logarithmen einer Wurzelgröße erhält man, wenn man den Logarithmen der Zahl mit dem Wurzelzeichen-exponenten dividiert; z. B. $L.\, \sqrt[n]{a} = \frac{Log.\, a}{n}$; denn

entweder:	oder:	
$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ (§. 45)	$b^z = a$	$z = L.\, a$
$L.\, \sqrt[n]{a} = L.\, a^{\frac{1}{n}}$	$b^{\frac{z}{n}} = a^{\frac{1}{n}}$	
$L.\, a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\, L.\, a$ (§. 108) $= \frac{L.a}{n}.$	$b^{\frac{z}{n}} = \sqrt[n]{a}$ (§. 45)	$\frac{z}{n} = L.\, \sqrt[n]{a}$
		$\frac{L.a}{n} = L.\, \sqrt[n]{a}.$

z. B. $L.\, \sqrt[4]{1000} = L.\, \frac{1000}{4} = \frac{3}{4}$, da $10^{\frac{3}{4}}$ $= \sqrt[4]{1000} = \sqrt[4]{10^3}.$

§. 110.

Wenn drei Zahlen A, B, C in einem geometrischen Verhältnisse stehen, so stehen die Logarithmen dieser Zahlen in einem arithmetischen Verhältnisse; oder wenn A : B : C, so L. A $\div$ L. B $\div$ L. C; denn AC $=$ B^2 (§. 84); $B = \sqrt{AC}$; L. B $=$ L. $\sqrt{AC}$ $=$ L. $A^{\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{2}}$ (§. 45) $=$ L. $A^{\frac{1}{2}}$ $+$ L. $C^{\frac{1}{2}}$ (§. 106) $= \frac{1}{2}$ L. A $+ \frac{1}{2}$ L. C (§. 108). Mithin ist L. A $\div$ L. B $\div$ L. C (§. 81). Z. B. wenn 10 : 100 : 1000; so ist L. 10 $\div$ L. 100 $\div$ L. 1000 da 1 $\div$ 2 $\div$ 3.

§. 111.

Nach dem vorhergehenden §. hat man auch die briggischen (§. 103) Logarithmen der natürlichen Zahlen von 1 angefangen bis zu hinreichender Anzahl berechnet. Z. B. welches ist der Log. von 5, oder $10^x = 5$. Es liegt 5 zwischen 1 und 10, und L. 5 zwischen L. 1 und L. 10; also:

1 10	L. 1 L. 10
5	L. 5
$\sqrt{1 \times 10} = 3{,}162277$ (§. 55)	$\frac{\text{L. } 1 + \text{L. } 10}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ $= 0{,}5 =$ L. 3, 162277.

Ferner liegt 5 zwischen 10 und 3, 162277, und Log. 5 zwischen L. 10 und L. 3,162277; mithin

3,162277 10	L. 3,162277 L. 10
5	L. 5
$\sqrt{3{,}162277 \times 10} = \sqrt{31{,}62277}$ $= 5{,}623413$	$\frac{\text{L. } 3{,}162277 + \text{L. } 10}{2} =$ L. 5,623413 $= \frac{0{,}5 + 1}{2} = \frac{1{,}5}{2} = 0{,}75.$

Also wäre $10^{0{,}75} = 5{,}623413$, und $0{,}75 =$ L. 5,623413. Doch nach weiterer solcher Berechnung ergibt sich, daß genauer $10^{0{,}69897} = 5$, und $0{,}69897 =$ L. 5.

Für jede einzelne Zahl durfte man die beschriebene Berechnung nicht machen, z. B. nicht bei den Multiplen (§. 106) von 5, d. h. bei 10, 15 ꝛc., da L. 15 $=$ L. (3×5) $=$ L. 3 $+$ L. 5, vorausgesetzt, man kenne Log. 3 schon.

Logarithmentafeln: ältere (1614) von Johann Neper, Baron v. Merchiston, einem Schotten; von Heinrich Brigg (§. 103); von Adrian Vlacq, einem Holländer, 1790 ediert von Joh. Jak. Ebert; neuere: von Joh. Karl Schulze (Berlin 1778), von Georg Frhrn. v. Vega, von Moriz v. Prasse (1825 ediert v. Karl Brandan Mollweide), von Prof. Dr. Minsinger, von Hofrath und Director Hoffmann, von Lieut. Schmölzl,

Stampfer, von Callet, Shervin, Lalande. Johann Neper ist der Erfinder der Logarithmen (Jost Byrge).

§. 112.

Gebrauch der log. Tafeln.

Die Vorreden zu Vega und Prasse ꝛc. belehren den Besitzer über den Gebrauch der Tafeln, da in dem Vorworte die Einrichtung der Tabellen genau angegeben wird. Die Kennziffer ist meistens als bekannt (§. 103) weggelassen, und es findet sich nur die Mantisse; z. B. Log. 2725 = (3,)4353665 in Vega; dagegen in Prasse (3,)43537. Ist eine Zahl größer, als 10000 in Prasse oder 101000 in Vega, so erhält man ihren Logarithmen durch Berechnung des Proportionaltheiles, der in Vega unter P. P. (pars proportionalis) für die Logarithmen einer sechs- und siebenzifferigen Zahl berechnet steht. Die Berechnung ist folgende: Der Unterschied dreier zunächst stehender großen Zahlen verhält sich wie der Unterschied ihrer Logarithmen, d. h. wenn aufsteigend A, B, C diese Zahlen sind; so ist C — A : B — A = Log. C — L. A : L. B — L. A. Wenn L. B — L. A = d, so ist L. B = L. A + d.

Man soll zu B = 234578 den Log. berechnen; es ist

nächst klein	A = 234570	L. A = 5,3702725
	B = 234578	L. B = 5,.......
nächst groß	C = 234580	L. C = 5,3702910

$$C - A : B - A = L.\ C - L.\ A : d$$
$$10 : 8 = 0{,}0000185 : d$$
$$d = \frac{8 \times 0{,}0000185}{10} = 0{,}00001480 \text{ (§. 32)},$$

und L. B = L. A + d = 5,3702725 + 0,0000148 = 5,3702873.

Eben so kann man umgekehrt zum Logarithmus 5,3702873 = L. B die entsprechende Zahl berechnen; denn

nächst klein	L. A = 5,3702725	A = 234570
	L. B = 5,3702873	B = x
nächst groß	L. C = 5,3702910	C = 234580

$$L.C - L.A : L.B - L.A = C - A : B - A\ (= d)$$
$$0{,}0000185 : 0{,}0000148 = 10 : d$$
$$d = \frac{0{,}0000148 \times 10}{0{,}0000185} = \frac{0{,}0001480}{0{,}0000185} = 8,$$

und B = A + d = 234570 + 8 = 234578.

§. 113.

1. Beispiel.

Eines gemeinen Bruches Logarithmen anzugeben; z. B. von $\frac{3}{4}$;

entweder:	oder:
L. 3 = +1 0,4771213 −1	L.3 = 0,4771213
L. 4 = 0,6020600	L.4 = 0,6020600
L. $\frac{3}{4}$ (§.107) = 0,8750613 — 1	— L. $\frac{4}{3}$ = —0,1249387 (§.107).

Denn wirklich ist 0,8750613 — 1 = 0,8750613 — 1,0000000 = — 0,1249387 (Rest).

Wenn also die entsprechende Zahl eines Logarithmen zu finden ist, von dem Einheiten abgezogen sind; z. B. von dem Logarithmen 0,8750613 — 1 sei die entsprechende Zahl zu suchen; so schneidet man von rechts zu links durch das Komma in der gefundenen Zahl um so viele Ziffern mehr ab (als die Charakteristik erfordert), als Einheiten abgezogen sind; nämlich: 0,75000 = $\frac{3}{4}$ entspricht dem Logarithmen 0,8750613 — 1. Und wenn von einem negativen Logarithmen die Zahl zu suchen ist, so schreibt man die gefundene Zahl als Nenner unter 1; z. B. dem Logarithmen — 0,1249387 entspricht die Zahl $\frac{1}{1,3333\ldots\ldots} = \frac{3}{4}$.

Wie groß ist der Logarithme von $9\frac{5}{6} = \frac{59}{6}$?

2. Beispiel.

Man soll den Logarithmen eines Decimalbruches angeben, z. B. von 70,534; 0,0002. Man schlage den Logarithmus dieser Zahlen ohne Komma auf, und ziehe von der treffenden Charakteristik so viele Einheiten ab, als Decimalstellen dastehen; mithin L. 70,534 = 4, 8483985 — 3 = 1,8483985; dann L. 0,0002 = 0,3010300 — 4; denn nach dem vorigen Beispiele ist die entsprechende Zahl von 0,3010300—4 = 0,0002. Welches ist der Logarithme zu 2,345?

§. 114.

Man erhält die decadische Ergänzung eines Logarithmen (complementum decadicum Logarithmi §. 10), wenn man den Logarithmus von 10 abzieht; z. B. die decadische Ergänzung des Log. 8 oder c . d . L. 8 = 10,0000000 — L. 8 = 10,0000000 — 0,9030900 = 9,0969100. Sollte man also von dem Logarithmus einer Zahl den L. 8 abziehen, so addiere man zum Logarithmus jener Zahl das Complement des L. 8, und ziehe 10 (= U) von der Summe weg.

§. 115.

Rechnung mit Logarithmen.

Die Logarithmen haben den Nutzen, daß sie eine Rechnung abkürzen, indem sie das Multiplicieren in eine Addition (§. 106), das Dividieren in eine Subtrac-

tion (§. 107), das Potenzieren in eine einmalige Multiplication (§. 108) und das Depotenzieren oder Wurzelausziehen in eine einmalige Division (§. 109) verwandeln; ferner kann man durch Logarithmen Aufgaben l ö s e n, deren Resultate man sonst nicht aufzufinden im Stande wäre; z. B. $\sqrt[5]{5}$; $\sqrt[x]{25} = 1{,}27$; $2^x = 17$ 2c.

1. B e i s p i e l.

Man verwandle $\frac{3}{4}$ in einen Decimalbruch!

$L.3 = {}^{+1}0{,}4771213^{-1}$
$L.4 = 0{,}6020600$
$- \quad -$

$L.\frac{3}{4} = 0{,}8750613-1$, dessen entsprechende Zahl $0{,}75 = \frac{3}{4}$.

Man verwandle $\frac{7}{8}$ in einen Decimalbruch!

2. B e i s p i e l.

Man multipliciere 3 mit 4!

$L.\ 3 = 0{,}4771213$
$L.\ 4 = 0{,}6020600$
$+ \quad +$

$L.(3 \times 4) = 1{,}0791813$, welchem Log. die Zahl 12 als Produkt entspricht.

Man multipliciere logarithmisch 25×273!

3. B e i s p i e l.

Man dividiere $4\frac{1}{2} : \frac{1}{2}$!

$L.\frac{9}{2} = 0{,}6532125$	$L.9 = 0{,}9542425$
$L.\frac{1}{2} = -0{,}3010300$ (§. 113);	$L.2 = 0{,}3010300$
$- \quad +$	$L.\frac{9}{2} = 0{,}6532125$

$L.(4\frac{1}{2} : \frac{1}{2}) = 0{,}9542425$, welchem Log. die Zahl 9 als Quotus entspricht.

Man dividire logarithmisch $= 1275 : 5$!

4. B e i s p i e l.

$$24 : 48 = 36 : x$$
$$x = \frac{48 \times 36}{24};$$
$$L.\ 48 = 1{,}6812412$$
$$L.\ 36 = 1{,}5563025$$
$$L.(48 \times 36) = 3{,}2375437$$
$$L.\ 24 = -\ 1{,}3802112$$
$$-$$
$$L.\left(\frac{48 \cdot 36}{24}\right) = 1{,}8573325 = L.x, \text{ und } x = 72;$$

oder:

L. 48 = 1,6812412	compl. dec. L. 24 = 8,6197888
L. 36 = 1,5563025	§. 114.
c. d. L. 24 = 8,6197888	

11,8573325 — 10 = 1,8573325, wie vorher.

Man suche auf beide Arten x in der Proportion:

$$2 : 9 = 3 : x!$$

5. Beispiel.

Man erhebe 8 zum Cubus oder 8^3!

$$L.\ 8 = 0{,}9030900$$
$$\times 3 = 3$$

3 L. 8 = 2,7092700; diesem Log. entspricht die Zahl 512 als Cubus von 8.

Welchen Werth hat 2^5?

6. Beispiel.

Welchen Werth hat x in $2^x = 4096$?

$$x\ L.\ 2 = L.\ 4096;$$

$$x = \frac{L.\ 4096}{L.\ 2} = \frac{3{,}6123599}{0{,}3010300} = 12.$$

6020599
6020600

(Rest gleich Null zu achten.)

Welchen Werth hat $3^x = 81$?

7. Beispiel.

Man ziehe aus 5 die fünfte Wurzel aus!

$$\sqrt[5]{5};\quad L.\ 5 = 0{,}6989700$$
$$:5 = :5$$

$$\frac{L.\ 5}{5} = 0{,}1397940.$$ Diesem Logarithmen entspricht $1{,}3797 = \sqrt[5]{5}$.

Wie groß ist $\sqrt[3]{3}$?

8. Beispiel.

Welche Wurzel muß man aus 10 ausziehen, um 3,1416 zu erhalten?

$$\sqrt[x]{10} = 3{,}1416;$$

$$\frac{L.\,10}{x} = \frac{1}{x}; \quad L.\,3{,}1416 = 0{,}4971509$$

$$\frac{1}{x} = 0{,}4971509$$

$$1 = 0{,}4971509 \times x$$

$$x = \frac{1}{0{,}4971509} = \frac{1{,}0000000}{0{,}4971509} = 2{,}01146$$

```
9943018
 5698200
  7266910
  22954010
  19886036
   30679740
   29829054
    8506860.
```

Mithin ist $\sqrt[2{,}01146\ldots]{10} = 3{,}1416$.

Wie groß ist $\sqrt[x]{10} = 3{,}1622777$?

Neunter Abschnitt.

Praktische Rechenkunst.

§. 116.

Zwei Größen stehen im geraden (directa) Verhältnisse, wenn mit der Zunahme oder Abnahme der einen auch die Zu- oder Abnahme der andern verknüpft ist. Zwei Größen stehen im umgekehrten (inversa) Verhältnisse, wenn mit der Zu- oder Abnahme der einen die Ab- oder Zunahme der andern verbunden ist; z. B. je mehr Waare, desto mehr Geld ist gerade verhältnißmäßig; je mehr Arbeiter, desto weniger Zeit zur nämlichen Verrichtung ist umgekehrt verhältnißmäßig.

§. 117.

Wenn zwei Größen A und B im geraden Verhältnisse stehen, und den Theilen a, am von A die Theile b, mb von B entsprechen; so entspricht, da m und n ganze Zahlen sind, dem $\frac{n}{m}$a von A das $\frac{n}{m}$b von B. Z. B. A = Kapital, B = Zins; a = 100, n = 3, m = 4; b = 5;

A	B	Kapital	Zins
a	b	100	5
ma	mb	$3 \cdot 100$	$3 \cdot 5$
$\frac{n}{m}a$	$\frac{n}{m}b$	$\frac{3}{4} \cdot 100$	$\frac{3}{4} \cdot 5$

Denn: $\frac{1}{m}a$ gebe d;

also $m \cdot \frac{1}{m}a$ gibt md

oder a » md
aber a » b
mithin b » md

und $\frac{1}{m}b$ » d

ferner $\frac{1}{m}a$ » d

also $\frac{1}{m}a$ » $\frac{1}{m}b$

endlich $\frac{n}{m}a$ » $\frac{n}{m}b$.

Wenn 100 fl. Kapital 5 fl. Zins geben, welchen Zins geben 36 fl. Kapital?

100 gibt 5

$\frac{36}{100} \times 100$ » $\frac{36}{100} \times 5$ oder $\frac{36}{20} = 1{,}8$ fl. Zins = 1 fl. 48 kr.

Weil offenbar $\frac{36}{100} \times 5 = 100 : 36 = 5 : x$ oder $= 100 : 5 = 36 : x$; so hat man dadurch (100 fl. K. geben 5 fl. Z., was 36 fl. K.?) die gerade Regeldetri (Dreisatz — regula de tribus terminis — regula aurea) begründet. In reesischer Stellung (der Holländer de Rees):

? Zins x	36 fl. K.	
K. fl. 100	5 fl. Z.	
20	36 1	{verkleinert:
5	9 5 4	$1\frac{4}{5}$ fl. Zins.

Wenn 100 fl. K. in 2 Jahren zu 5 Procent 10 fl. Zins geben, welchen Zins geben dann 200 fl. K. in 3 Jahren zu 4 pCt.?

100 . 2 . 5 geben 10

und $\frac{200 \cdot 3 \cdot 4}{100 \cdot 2 \cdot 5}$ von 100 . 2 . 5 geben $\frac{200 \cdot 3 \cdot 4}{100 \cdot 2 \cdot 5}$ von 10 = 24 fl. Zins;

Nun ist offenbar $\frac{200 \cdot 3 \cdot 4}{100 \cdot 2 \cdot 5} \cdot 10 = (100 \cdot 2 \cdot 5) : 10 = (200 \cdot 3 \cdot 4) : x$;

oder: Z. fl. x 200 fl. K.

K.	100	3	Jahr
J.	2	4	pCt.
pCt.	5	10	fl. Z.
	2	2	verkleinert.
		2	
		3	
		4	
		24	fl. Zins.

Zur Uebung nach allen Arten: 100 fl. K. geben $4^3/_4$ fl. Zins, welchen Zins geben 187 fl. K.? ($4^3/_4 = {}^{19}/_4$; Nenner 4 reesisch auf die andere Seite gesetzt!).

Wenn man von 100 fl. K. in 4 Jahren zu 5 Procent 20 fl. Zins erhält, welchen Zins bekommt man von 1000 fl. K. in 9 Jahren zu 4 pCt.?

§. 118.

Wenn zwei Größen A und B im umgekehrten Verhältnisse stehen, und dem Theile a, ma von A die Theil b, $\frac{1}{m}$b von B entsprechen; so entspricht, da m und n ganze Zahlen sind, dem $\frac{m}{n}$a von A das $\frac{n}{m}$b von B; z. B.

A	B	Mann	Tage
a	b	8	5
ma	$\frac{1}{m}$b	2 . 8	$\frac{1}{2} \cdot 5$
$\frac{n}{m}$a	$\frac{m}{n}$b	$\frac{3}{4} \cdot 8$	$\frac{4}{3} \cdot 5$.

Dann: $\frac{1}{m}$a gebe d

also m . $\frac{1}{m}$a gibt $\frac{1}{m}$d

oder a » $\frac{1}{m}$d

aber	a	gibt	b
sohin	b	»	$\frac{1}{m}d$
d. h.	mb	»	d
auch	$\frac{1}{m}a$	»	d
daher	$\frac{1}{m}a$	»	mb
endlich	$\frac{n}{m}a$	»	$\frac{m}{n}b$.

Wenn 8 Mann zu einer Verrichtung 5 Tage brauchen, wie lange brauchen 10 Mann dazu?

Mann 8 Tage 5

$$\frac{10}{8} \times 8 \qquad \frac{8}{10} \times 5 = 4 \text{ Tage.}$$

Nun ist wieder offenbar $\frac{8}{10} \times 5 = 10 : 8 = 5 : x$ oder $10 : 5 = 8 : x$, d. h. Mann 10 = Tage 5 = Mann 8 = umgekehrte Regeldetri; oder reesisch:

? Tage	8 M.
M. 10	5 T.
	4 Tage brauchen 10 Mann.

Eine Festung ist auf 90 Tage für 6000 Mann mit Brod versehen, wenn man täglich einem Mann 2 ℔. Brod gibt; wie viele Pfund Brod darf man täglich einem Manne geben, wenn von dem nämlichen Vorrathe 5000 Mann 130 Tage ernährt werden sollen?

$90 \times 6000 \times 2$ geben den Vorrath = 1

$\frac{130 . 5000 . x}{90 . 6000 . 2}$ $90 . 6000 . 2$ geben $\frac{90 . 6000 . 2}{130 . 5000 . x}$ vom Vorrathe; d. h.

$$130 \times 5000 \times x = 90 \times 6000 \times 2$$

also $(90 \times 6000 \times 2) : (130 \times 5000) = x : 1$, und reesisch:

℔ x ?	
Tage 130	90 Tage
Mann 5000	6000 Mann
	2 ℔.
	$1\frac{43}{65}$ ℔. Brod.

Zur Uebung: 19 Mann brauchen zu einer Arbeit 14 Tage, wie lange brauchen dazu 57 Mann?

Wenn 20 Mann eine Arbeit (= 1) in 8 Monaten verrichten, da sie wochentlich 5 Tage und täglich 12 Stunden arbeiten; in wie vielen Monaten werden 40 Mann

diese Arbeit fertigen, wenn sie wochentlich 6 Tage und täglich 10 Stunden arbeiten?

§. 119.

Kommen in einer Aufgabe gemischte Verhältnisse vor, gerade und umgekehrte, so setze man die jedesmaligen Proportionen an, und verfahre wie bisher; z. B. wenn 20 Arbeiter in 15 Tagen, im Falle sie täglich 8 Stunden arbeiten, eine Mauer verfertigen, die 40 Fuß lang, 1½ Fuß dick und 20 Fuß hoch ist; wie viele Zeit werden 40 Arbeiter, die täglich 10 Stunden arbeiten, zu 2 Mauern verwenden, wovon jede 50 Fuß lang, 2 Fuß dick und 30 Fuß hoch ist?

Arb.	20 : 40 =	1 : 2 Mauern	(umgekehrt);
Tage	15 : x	40 : 50 lang	
(umgek.) Stund.	8 : 10	$1\frac{1}{2}$: 2 dick	gerade;
		20 : 30 hoch	

also $40 \cdot x \cdot 10 \cdot 1 \cdot 40 \cdot 1\frac{1}{2} \cdot 20 = 20 \cdot 15 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 50 \cdot 2 \cdot 30$, und reesisch:

x	20
40	15
10	8
1	2
40	50
$1\frac{1}{2}$	2
20	30
	30 Tage.

Die Probe wird gemacht, wenn man ein Glied, das bekannt ist, unbekannt annimmt, und für x den Werth einsetzt; dann muß das unbekannt angenommene Glied wieder erscheinen.

Betrachtet man in der vorigen Aufgabe die Arbeiter und Stunden in Bezug auf die Tage, so haben hierin zwei umgekehrte Verhältnisse Statt; nämlich:

Arbeit.	20 : 40 =	15 : x Tg.
Stund.	8 : 10	
Mauer	1 : 2	
	40 : 50	
	$1\frac{1}{2}$: 2	
	20 : 30	

$x \cdot 10 \cdot 40 \cdot 1 \cdot 40 \cdot 1\frac{1}{2} \cdot 20 = 15 \cdot 20 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 50 \cdot 2 \cdot 30$.

Zur Uebung: Wenn 23 Mann in 14 Tagen, da sie täglich 9 St. arbeiten, 1 Mauer verfertigen, 42' lang, 2' dick und 18' hoch; wann werden 40 Mann mit 3 Mauern fertig sein, jede 50' l., 2⅓' d. und 30' h., wofern sie täglich 10 St. arbeiten? Probe!

§. 120.

Die Gesellschaftsrechnung und alle ihr verwandten Rechnungen, nämlich die Theilungs-, Brandassecuranz-

Rechnungen rc. *) sind eine bloße Anwendung des §. 89; z. B. 3 Kaufleute legen zusammen: A 4000 fl. auf 9 Jahre, B 5000 auf 7 Jahre und C 1000 fl. auf 14 Jahre. Sie gewinnen damit 2000 fl. Was trifft jedem von dem Gewinne? Es ist 2000 = B;

A) 4000 × 9 = 36000 fl. = a
B) 5000 × 7 = 35000 » = b
C) 1000 × 14 = 14000 » = c

85000 fl. = a + b + c.

A

```
        ? | 36000
    85000 | 2000
    ------------
          | 2000
       85 | 36
    ------------
          | 400
       17 | 36
    ------------
          14400 | 847 1/17 fl. = x.
          136   |
          -----
            80
            68
           ---
           120
           119
           ---
             1
```

B

```
        ? | 35000
    85000 | 2000
    ------------
          | 2000
       85 | 35
    ------------
          | 2000
       17 | 7
    ------------
        14000 | 823 9/17 = y.
        136   |
        -----
          40
          34
          --
           60
           51
           --
            9
```

C

```
        ? | 14000
    85000 | 2000
    ------------
          | 14000
       85 | 2
    ------------
          | 28000 | 329 7/17 = z.
          | 255   |
          -----
          | 250
          | 170
            ---
            800
            765
            ---
             35
             --  = 7/17
             84
```

P r o b e.

A) $847\frac{1}{17}$ fl. Gewinn
B) $823\frac{9}{17}$ » »
C) $329\frac{7}{17}$ » »

2000 » »

*) Bei der Brandassecuranzrechnung verhält sich die Summe des Werthes der versicherten Gebäude zur Summe des Totalschadens, wie der Schätzungswerth des assecurierten Gebäudes zu dem zu leistenden Beitrage.

§. 121.

Zinseszinsrechnung.

Wenn das Kapital q jährlich p Zinsen trägt, so trägt im ersten Jahre das Kapital a an Zinsen $\frac{ap}{q}$, weil $q : p = a : x$, wo $x = \frac{ap}{q}$; schlägt man diesen Zins zum Kapitale, so hat man:

2tes Jahr

$$\begin{array}{r|l} ? & a + \frac{ap}{q} \\ q & p \\ \hline & \frac{ap}{q} + \frac{ap^2}{q^2} \text{ Zins.} \end{array}$$

3tes Jahr

$$\begin{array}{r|l} ? & a + \frac{ap}{q} \cdot 2 + \frac{ap^2}{q^2} \\ q & p \\ \hline & \frac{ap}{q} + \frac{2ap^2}{q^2} + \frac{ap^3}{q^3} \text{ Zins.} \end{array}$$

4tes Jahr

$$\begin{array}{r|l} ? & a + \frac{3ap}{q} + \frac{3ap^2}{q^2} + \frac{ap^3}{q^3} \\ q & p \\ \hline & \frac{ap}{q} + \frac{3ap^2}{q^2} + \frac{3ap^3}{q^3} + \frac{ap^4}{q^4} \text{ Zins.} \end{array}$$

Die Kapitals- und Zinsensumme ist $a + \frac{4ap}{q} + \frac{6ap^2}{q^2} + \frac{4ap^3}{q^3} + \frac{ap^4}{q^4} = S = \left(\frac{p+q}{q}\right)^4 a = \left(\frac{q+p}{q}\right)^4 a$ (§. 63), somit in n Jahren ist $S = \left(\frac{q+p}{q}\right)^n a$.

Wie groß wird das Kapital von 1000 fl. bei 5 Proc. mit den Zinseszinsen in 25 Jahren?

? S
$a = 1000$
$p = 5$
$q = 100$
$n = 25$

$$S = \left(\frac{105}{100}\right)^{25} \times 1000;$$

$$\begin{array}{rl} L.\ 105 & = 2{,}0211893 \\ L.\ 100 & = 2{,}0000000 \\ \hline L.\ \frac{105}{100} & = 0{,}0211893 \\ & \times\ 25 \\ \hline & 1059465 \\ & 423786 \\ \hline L.\left(\frac{105}{100}\right)^{25} & = 0{,}5297325 \\ L.\ 1000 & = 3{,}0000000 \\ \hline L.\ S & = 3{,}5297325 \\ S & = 3386{,}36 \text{ fl. K. u. Zs.} \end{array}$$

§. 122.

Aus der Formel $S = \left(\frac{q + p}{q}\right)^n a$ ergeben sich durch die Lehre von den Gleichungen die folgenden Formeln.

$$\frac{S}{a} = \left(\frac{q + p}{q}\right)^n ; \quad \sqrt[n]{\frac{S}{a}} = \frac{q + p}{q} ;$$

Ferner: $L. \frac{S}{a} = L. \left(\frac{q + p}{q}\right)^n = n\, L. \frac{q + p}{q}$;

$$q\sqrt[n]{\frac{S}{a}} = q + p ; \; p = - q + q \sqrt[n]{\frac{S}{a}} \; (I.).$$

$$L. S - L. a = n(L. (q + p) - L. q);$$

$n = \frac{L. S - L. a}{L. (q + p) - L. q}$ (II.). Endlich ist $a = \left(\frac{q}{q + p}\right)^n S$ (III.).

Zur Uebung! In wie vielen Jahren wird ein 5procentiges Kapital a bei Zinseszinsen so viel abwerfen, als 2a beträgt?

$S = 2a$	$n = \frac{L. 2a - L. a}{L. 105 - L. 100}$
$q = 100$	
$p = 5$	$n = L. \frac{2a}{a} : L. \frac{105}{100}$
? n	$n = L. 2 : L. \frac{105}{100} =$? Jahre.

§. 123.

Rabbatt (Interusurium) ist der Abzug, der dem Schuldner zu gute kommt, wenn er das Kapital a vor der Verfallzeit zurückbezahlen darf. Ist der landesübliche Zinsfuß q : p und der paciscierte q : r; so muß die entrichtete Summe S in n Jahren $\left(\frac{q + p}{q}\right)^n S$ abwerfen, während a in n Jahren $\left(\frac{q + r}{q}\right)^n a$ abwirft, wobei dann der Ausgleichung wegen $\left(\frac{q + p}{q}\right)^n S = \left(\frac{q + r}{q}\right)^n a$ ist, und

$$S = \left(\frac{q + r}{q}\right)^n a : \left(\frac{q + p}{q}\right)^n = \left(\frac{q + r}{q}\right)^n a \times \left(\frac{q}{q + p}\right)^n$$

$= \left(\frac{q + r}{q + p}\right)^n a$. Ist $r = 0$, so ist $S = \left(\frac{q}{q + p}\right)^n a$; z. B. Welchen Rabbatt beträgt ein auf der Stelle heimbezahltes unverzinsliches Kapital zu 400 fl., das 4 Jahre lang auszustehen hätte?

$? S$ $\quad S = \left(\frac{100}{105}\right)^4 . 400;$

$q = 100$

$p = 5$ $\quad L. \frac{100}{105} = -0,0211893$

$r = 0$ $\quad\quad\quad \times 4$

$a = 400$ $\quad L. \left(\frac{100}{105}\right)^4 = -0,0847572$

$n = 4$ $\quad L. 400 = 2,6020600$

$L. S = 2,5173028$

$S = 329,08$ fl.

$400 - S = 70,92$ fl. Rabbatt.

§. 124.

Gibt man ein Kapital a nach dem Zinsfuße q : p auf n Jahre auf Zinseszinse, und legt man noch jährlich b hinzu; so findet sich die treffende Einnahmssumme S so:

$q : p = a : x$; $x = \frac{ap}{q}$; für das zweite Jahr $a + \frac{ap}{q} = \frac{q+p}{q} a + b$

2tes Jahr
$$? \mid \frac{q+p}{q} a + b$$
$$1 \mid \frac{q+p}{q} \quad (\text{z. B. } 100 : 105 = 1 : \tfrac{105}{100})$$
$$\left(\frac{q+p}{q}\right)^2 a + \frac{q+p}{q} b + b$$

3tes Jahr
$$? \mid \left(\frac{q+p}{q}\right)^2 a + \frac{q+p}{q} b + b$$
$$1 \mid \frac{q+p}{q}$$
$$\left(\frac{q+p}{q}\right)^3 a + \left(\frac{q+p}{q}\right)^2 b + \frac{q+p}{q} b + b$$

Also ntes Jahr: $S = \left(\frac{q+p}{q}\right)^n a + \left(\frac{q+p}{q}\right)^{n-1} b$

$$+ \left(\frac{q+p}{q}\right)^{n-2} b + \left(\frac{q+p}{q}\right)^{n-3} b \ldots\ldots b.$$

Man summiere die Reihe der b Glieder nach §. 104, 2. Beisp., wo $a = b$; $u = \left(\frac{q+p}{q}\right)^{n-1} b$, $m = \frac{q+p}{q}$ ist.

Es wird nun $\frac{um-a}{m-1} = \frac{\left(\frac{q+p}{q}\right)^n b - b}{\frac{q-p}{q} - 1} = \frac{\left(\frac{q+p}{q}\right)^n b - b}{\frac{q}{q} + \frac{p}{q} - 1}$

$= \frac{\left(\frac{q+p}{q}\right)^n bq - bq}{p}$. Hiezu addiert das erste Glied $\left(\frac{p+q}{q}\right)^n a$ gibt $S = \frac{\left(\frac{p+q}{q}\right)^n ap}{p} + \frac{\left(\frac{q+p}{q}\right)^n bq - bq}{p}$

$$= \frac{\left(\frac{q+p}{q}\right)^n (ap + bq) - bq}{p}.$$

Wenn $b = -b$ oder b jährlich weggenommen wird, z. B. bei dem Holzbestande, wo jährlich b gefällt wird, ist $R = \frac{\left(\frac{q+p}{q}\right)^n (ap - bq) + bq}{p}$, und wenn $b = 0$, so erscheint $S = \left(\frac{q+p}{q}\right)^n a$ (§. 121).

Wenn $b = a$, ist $R = \frac{\left(\frac{q+p}{q}\right)^n (ap - aq) + aq}{p}$

$$= \frac{\left(\frac{q+p}{q}\right)^n a\,(p-q) + aq}{p} = \frac{a\left(\left(\frac{q+p}{q}\right)^n (p-q) + q\right)}{p}.$$

Aus den Werthen S und R findet man durch die Lehre von den Gleichungen folgende Formeln: (Weiß man die Formeln aus S, kennt man auch jene aus R und umgekehrt).

$$pR = \left(\frac{q+p}{q}\right)^n ap - \left(\frac{q+p}{q}\right)^n bq + bq$$

$$pR - \left(\frac{q+p}{q}\right)^n ap = b\left(q - q\left(\frac{q+p}{q}\right)^n\right)$$

$$\text{I. } b = \frac{pR - \left(\frac{q+p}{q}\right)^n ap}{q - q\left(\frac{q+p}{q}\right)^n};$$

ferner $pR + \left(\frac{q+p}{q}\right)^n bq - bq = \left(\frac{q+p}{q}\right)^n ap$;

$$\text{II. } a = \frac{pR + \left(\frac{q+p}{q}\right)^n bq - bq}{\left(\frac{q+p}{q}\right)^n p}\text{; endlich:}$$

$$pR - bq = \left(\frac{q+p}{q}\right)^n (ap - bq)$$

$$\frac{pR - bq}{ap - bq} = \left(\frac{q+p}{q}\right)^n$$

$$L.\ \frac{pR - bq}{ap - bq} = n\ L.\ \frac{q+p}{q};$$

$$\text{III. } n = L.\ \frac{pR - bq}{ap - bq} : L.\ \frac{q+p}{q}.$$

Z. B. 1000 fl. sind zu 5 prC. aufgelegt, und werden nebst den Zinsen jährlich um 100 fl. vermehrt; wie groß ist die Summe nach 25 Jahren?

$a = 1000$
$q = 100$
$b = 100$
$p = 5$
$n = 25$

$$S = \frac{\left(\frac{105}{100}\right)^{25} (5000 + 10000) - 10000}{5}$$

$$S = \left(\frac{105}{100}\right)^{25} (3000) - 2000;$$

$$L.\ \left(\frac{105}{100}\right)^{25} = 0{,}5297325\ (\S.\ 121).$$

$$L.\ 3000 = 3{,}4771213$$

$4{,}0068538$; entspricht

10159,07
2000,00
8159,07 fl. = S.

§. 125.

Bei unverzinslichen Fristenzahlungen findet man den mittlern Termin, wenn man die Jahre mit den Fristen multipliciert, diese Producte addiert, und in die erhaltene Summe mit der Summe der Fristen dividiert.

Zehnter Abschnitt.

Binomische Regel.

§. 126.

Der von Isaak Newton erfundene Satz, newtonisches Binomium genannt, gibt die Regeln an, um jede zweitheilige Größe zu potenzieren und zu depotenzieren; z. B. $(a + b)^m$; $\left(\overset{I.}{(a+b)} + \overset{II.}{c}\right)^m$ u. s. w. Die Gesetze davon sind: 1) Ist der Exponent m eine positive ganze Zahl, so ist die Reihe endlich, und hat um 1 Glied mehr, als der Exponent Einheiten; ist aber der Exponent keine positive ganze Zahl, so ist die Reihe unendlich; 2) das erste Glied der Reihe ist das erste des Binoniums mit dem Exponenten; 3) der Exponent von a nimmt in jedem folgenden Gliede um 1 ab, der Exponent von b aber um 1 zu; 4) der Coefficient ist jedesmal ein Bruch, dessen Zähler das Product aller Exponenten von a in den vorausgegangenen Gliedern enthält, und dessen Nenner das Product aller Zahlen von 1 angefangen bis zur Anzahl der vorangegangenen Glieder ist. Bezeichnung:

$$(a + b)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1}b + \frac{m \,.\, m-1}{1 \,.\, 2} a^{m-2}b^2 + \frac{m^{m-1} \,.\, m-2 \,.\, a^{m-3}b^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2 \,.\, m-3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} a^{m-4}b^4 + \ldots.$$

(allgemeines Glied) $\frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2 \ldots m-(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots n-1} a^{m-(n-1)}b^{n-1}$,

wo n die Zahl der Glieder bedeutet.

Der Beweis wird hier durch Induction so geführt: Es ist

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (§. 51)
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (§. 60)
$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ (§. 63).

In allen diesen Fällen ersieht man das oben angeführte Gesetz; z. B. beim Biquadrate nehmen die Exponenten von a um 1 ab, jene von b um 1 zu; die Coefficienten sind nach der Ordnung $4 = \frac{4}{1}$; $6 = \frac{4 \,.\, 3}{1 \,.\, 2}$; $4 = \frac{4 \,.\, 3 \,.\, 2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$, $= \frac{4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}$; es sind 5 Glieder $(4 + 1)$ rc. Setzt man nun $4 = m$, so erhält man die vorige Buchstabenreihe. Es soll nun durch dieses Verfahren die Giltigkeit bis auf eine Würde $m > 4$ erwiesen sein; so kann man,

wie folgt, zeigen, daß die Gesetze auch für die m + 1ste Potenz gelten, also überhaupt;

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2}a^{m-2}b^2 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1,2 \cdot 3}a^{m-3}b^3 \ldots$$
$$\times (a+b) = \times (a+b)$$

$$(a+b)^{m+1} = a^{m+1} + ma^m b + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2}a^{m-1}b^2 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{m-2}b^3 + \ldots$$
$$a^m b + ma^{m-1}b^2 + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2}a^{m-2}b^3 + \ldots$$

$$(a+b)^{m+1} = a^{m+1} + \left.\begin{matrix} m \\ +1 \end{matrix}\right\} a^m b + \left.\begin{matrix} m \\ \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} \end{matrix}\right\} a^{m-1}b^2 + \left.\begin{matrix} \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\ + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} \end{matrix}\right\} a^{m-2}b^3 \ldots$$

In diesem Produkte erkennt man die Gesetze des Binomiums; denn die Exponenten von a nehmen um 1 ab, jene von b um 1 zu; die Coefficienten folgen ebenfalls der aufgestellten Norm;

nämlich: $m + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} = \frac{2m + m^2 - m}{1 \cdot 2} = \frac{m^2 + m}{1 \cdot 2}$
$= \frac{m \cdot m + 1}{1 \cdot 2} =$ Coeff. des dritten Gliedes; ferner

$$\frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} = \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$
$$+ \frac{3m \cdot m - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{m^2 - m \cdot m - 2 + 3m^2 - 3m}{6}$$
$$= \frac{m^3 - 2m^2 - m^2 + 2m + 3m^2 - 3m}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{m^3 - m}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$= \frac{m \cdot m + 1 \cdot m - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} =$ Coeff. des vierten Gliedes u. s. w.

§. 127.

Um eine bequeme Potenzierungs- und Depotenzierungsformel zu erhalten, setzt man

$(a + b) = a\left(1 + \frac{b}{a}\right) = a(1 + q)$; mithin ist

$$(a + b)^m = a^m (1 + q)^m = a^m \left(1^m + \frac{m}{1} \cdot 1^{m-1}q + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} \cdot 1^{m-2}q^2 + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 1^{m-3}q^3 + \ldots\right)$$

$$=a^m\left(1+mq+\frac{m.m-1}{1.2}q^2+\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}q^3...\right)$$

$$=a^m+ma^mq+\frac{m.m-1}{1.2}a^mq^2+\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}a^mq^3...$$

Jedes dieser Glieder ist offenbar in jedem folgenden enthalten; wenn also $a^m = A$, so ist $ma^mq = mAq = B$; $\frac{m.m-1}{1.2}a^mq^2 = \frac{m-1}{2}Bq$ ꝛc. Mithin ist

$$(a+b)^m = a^m + mAq + \frac{m-1}{2}Bq + \frac{m-2}{3}Cq + \frac{m-3}{4}Dq + \frac{m-4}{5}Eq + ...$$

1. Beispiel.

$(a^2 \pm x)^4$! Hier ist $a^2 = a$, $b = \pm x$; $\frac{b}{a} = q = \frac{\pm x}{a^2}$, $m = 4$; somit

$$a^m = (a^2)^4 = a^2 . a^2 . a^2 . a^2 = a^8 = A$$

$$mAq = 4 . a^8 . \frac{\pm x}{a^2} = \pm 4a^6x = B$$

$$\frac{m-1}{2}Bq = \tfrac{3}{2} . \pm 4a^6x . \frac{\pm x}{a^2} = 6a^4x^2 = C$$

$$\frac{m-2}{3}Cq = \tfrac{2}{3} . 6a^4x^2 . \frac{\pm x}{a^2} = \pm 4a^2x^3 = D$$

$$\frac{m-3}{4}Dq = \tfrac{1}{4} . \pm 4a^2x^3 . \frac{\pm x}{a^2} = x^4 = E$$

$$\frac{m-4}{5}Eq = 0$$

$$(a^2 \pm x)^4 = a^8 \pm 4a^6x + 6a^4x^2 \pm 4a^2x^3 + x^4.$$

2. Beispiel.

$\sqrt[n]{a^m \pm x} = (a^m \pm x)^{\frac{1}{n}}$, wo $a^m = a$, $b = \pm x$, $\frac{b}{a} = q = \frac{\pm x}{a^m}$; $m = \frac{1}{n}$. Also:

$$a^m = (a^m)^{\frac{1}{n}} = A;$$

$$mAq = \frac{1}{n} \cdot (a^m)^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\pm x}{a^m} = \pm \frac{1}{n}(a^m)^{\frac{1}{n}-1} x = B;$$

$$\frac{m-1}{2}Bq = \frac{\frac{1}{n}-1}{2} \cdot \pm \frac{1}{n}(a^m)^{\frac{1}{n}-1} x \cdot \frac{\pm x}{a^m} = + \frac{1-n}{2n^2}(a^m)^{\frac{1}{n}-2} x^2 = C;$$

$$\frac{m-2}{3}Cq = \frac{\frac{1}{n}-2}{3} \cdot + \frac{1-n}{2n^2} \cdot (a^m)^{\frac{1}{n}-2} x^2 \cdot \frac{\pm x}{a^m} =$$

$$\pm \frac{1-2n}{3n} \cdot \frac{1-n}{2n^2}(a^m)^{\frac{1}{n}-2} \cdot \frac{\pm x^3}{a^m}$$

$$= \pm \frac{1-n \cdot 1-2n}{1 \cdot 2 \cdot 3n^3}(a^m)^{\frac{1}{n}-3} x^3 = D \text{ rc.}$$

Z. B. $\sqrt{a^2 \pm x}$, wo $n = 2$, $m = 2$;

$$\sqrt{a^2 \pm x} = (a^2)^{\frac{1}{2}} = a = A;$$

$$\pm \frac{1}{2} \cdot (a^2)^{-\frac{1}{2}} x = \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(a^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot x = \pm \frac{x}{2\sqrt{a^2}} = \frac{\pm x}{2a} = B$$

$$\frac{1-2}{2 \cdot 2^2}(a^2)^{-\frac{3}{2}} x^2 = -\frac{1}{8} \cdot \frac{1 \cdot x^2}{(a^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x^2}{8\sqrt{a^{2 \cdot 3}}} =$$

$$-\frac{x^2}{8\sqrt{a^6}} = -\frac{x^2}{8a^3} = C;$$

$$\frac{1-2 \cdot 1-4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^3}(a^2)^{-\frac{5}{2}} x^3 = \pm \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{(a^2)^{\frac{5}{2}}} \cdot x^3 = \pm \frac{x^3}{16a^5} = D \text{ rc.}$$

Zur Uebung! $\sqrt[5]{5} = \sqrt[5]{\begin{matrix}3125 - 3120\\ = (5^5 - 3120\end{matrix}}$, wo $m = \frac{1}{5}$,

$$a = 3125,\ b = -3120,\ \frac{b}{a} = q = -\frac{3120}{3125} = -\frac{624}{625};$$

$$a^m = 3125^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{3125} = 5 = A,$$

$$mAq = \frac{1}{5} \cdot 5 \cdot -\frac{624}{625} = -\frac{624}{625} = B$$

$$\frac{m-1}{2}Bq = \frac{\frac{1}{5}-1}{2} \cdot \frac{-624}{625} \cdot \frac{-624}{625} = -\frac{2}{5} \cdot \frac{624^2}{625^2} = C \text{ u. s. f.}$$

(Vergleiche aber §. 115, 7. Beisp.)

§. 128.

Das Nöthigste der Combinationslehre.

Permutieren heißt, die Stellen der Dinge verwechseln; z. B. aus abc wird acb, bca, bac, cab, cba.

Combinieren heißt, die Dinge zu je zweien, je dreien, je vieren (zu Amben, Ternen, Quaternen) ꝛc. zusammenfassen, mit oder ohne Wiederholung; z. B. aus abc wird zu zweien, ab, ac, bc oder aa, bb, cc, ab, ac, bc.

Varieren heißt nach je zweien, je dreien ꝛc. permutieren und combinieren zugleich, mit oder ohne Wiederholung; z. B. aus abc werden die Variationen zu zweien: ab, ba, ac, ca, bc, cb oder aa, ab, ba, ac, ca, bb, bc, cb, cc.

Die beigefügte Uebersicht der Combinationslehre wird hierüber das Geeignete beibringen, wobei nur zu bemerken ist, daß n die Zahl der Dinge (Elemente) bedeutet.

Der Nutzen in Bezug auf Anagramme, Zahlenlotterie, Würfelspiel, Kartenspiel, Quantitäten in der Prosodie, Multiplication (Binomium), Sparsamkeit im Decimalsysteme, Schlußarten der Logik ꝛc. wird unschwer aus der Tabelle einleuchten, und bleibt dem Vortrage überlassen.

Uebersicht der Combinationslehre.

Elemente	Permutationen.	Combinationen ohne Wiederholung. Amben.	Combinationen ohne Wiederholung. Ternen.	Combinationen mit Wiederholung. Amben.	Combinationen mit Wiederholung. Ternen.	Variationen. ohne Wiederholung. Amben.	Variationen. ohne Wiederholung. Ternen.	Variationen. mit Wiederholung. Amben.	Variationen. mit Wiederholung. Ternen.	Anmerkung.
a e i o n Dinge.	a ae, ea iae, aie, eai iea, eia, aei oiea, ioea, iaoe iaeo, oeia, eoia, eioa, eiao, oaie, aoie, aioe, aieo, oaei, aoei, aeoi, aeio, oiae, ioae, ieoa, ieao, oeai, eoai, eaoi, eaio $=1.2.3.4....n$	ae, ai, ao, ei, eo, io $=\frac{n.n-1}{1.2}$	aei, aeo, aio, eio $=\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}$	aa, ee, ii, oo, ae, ai, ao, ei, eo, io $=\frac{n.n+1}{1.2}$	aaa, eee, iii, ooo, aei, aeo, aio, eio, eaa, iaa, oaa, aee, iee, oee, aii, eii, oii, aoo, eoo, ioo $=\frac{n.n+1.n+1}{1.2.3}$	ae, ai, ao, ea, ei, eo, ia, ei, io, oa, oe, oi $=n.n-1$ $=n^2-n$	aei, aeo, aie, aio, aoe, aoi, eai, eao, eia, eio, eoa, eoi, iae, iao, iea, ieo, ioa, ioe, oae, oai, oea, oei, oia, oie $=$ $n.n-1.n-2$ $=n^3-3n^2+2n$	aa, ae, ea, ee, ai, ia, ei, ie, ii, ao, oa, eo, oe, io, oi, oo $=n^2$	AAA, eaa, iaa, oaa, aae, EAE, iae, oae, aea, eea, iea, oea, AEE, eee, iee, oee, AAI, eai, IAI, oai, aia, eia, iia, oia, aei, eei, iei, oei, aie, eie, iie, oie, AII, eii, iii, oii, aao, EAO, iao, OAO, aoa, eoa, ioa, ooa, AEO, eeo, ieo, oeo, aoe, eoe, ioe, ooe, aio, EIO, iio, oio, aoi, eoi, ioi, ooi, AOO, eoo, ioo, ooo $=n^3$	Die in Versalletteren gedruckten Ternen der Variationen mit Wiederholung bedeuten die zulässigen Schlußarten.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Grieser, Johann Georg

Elementare Arithmetik und Algebra Nach den Forderungen der Ordnung der lat. Schulen und der Gymnasien vom J. 1830

Kempten 1832

Math.p. 187 l
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081854-2